K. SIMONYI

GRUNDGESETZE DES ELEKTROMAGNETISCHEN FELDES



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

K. SIMONYI

GRUNDGESETZE DES ELEKTROMAGNETISCHEN FELDES



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

K. SIMONYI

Grundgesetze des elektromagnetischen Feldes

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK

Herausgegeben von F. X. Eder und Robert Rompe

BAND 30

GRUNDGESETZE DES ELEKTROMAGNETISCHEN FELDES

von

K. SIMONYI



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN 1963

Simonyi Károly, Villamosságtan
Akadémiai kiadó, Budapest 1954

Übersetzung aus dem Ungarischen: Ing. Henrik Theil, Budapest
Deutsche Bearbeitung: Dr. Gunther List, Hamburg

ES 18 B 6

Verantwortlicher Lektor: R. Sube

Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 206 · 435/66/63
Schutzumschlag: Hartwig Hoeftmann
Gesamtherstellung: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig III/18/203

Seite, Zeile	Falsch	Richtig
46, 3 v. u.	$H_z =$	$-H_z =$
47, 2 v. u.	$-$	$+$ (vor dem zweiten Glied in der geschweiften Klammer)
48, 6 v. o.	$H_x =$	$-H_x =$
		der Ausdruck nach dem zweiten Gleichheitszeichen ist zu streichen
163, 2 v. u.	$-$	$+$
164, 2 v. u.	$-Q'$	Q'
165, 5 v. o.	$= k$	$= -k$
168, 6 v. o.	$E_0 =$	$E_0 = -$
173, 2 v. u.	$x_i = \frac{D}{2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - r_i^2}$	$x_1 = \frac{D^2 + r_1^2 - r_2^2}{2D} - \sqrt{\left(\frac{D^2 + r_1^2 - r_2^2}{2D}\right)^2 - r_1^2}$, entspr. für x_2
256, 10 v. u.	$\sqrt{r^2 + l^2 - l}$	$\sqrt{r^2 + l^2} - l$
6 v. u.	$\sqrt{r^2 + l^2} +$	$\sqrt{r^2 + l^2} + l$
296, 11 v. u.	$-\mathfrak{E} =$	$-\mathfrak{E}^* =$
342, 3 v. o.	$(\mathfrak{m}\mathfrak{r}^0)\,\mathfrak{r}^0$	$3(\mathfrak{m}\mathfrak{r}^0)\,\mathfrak{r}^0$
344, Abb. 327		zu ergänzen: (nach SADIKOW)
384, Abb. 351a, Abszissenachse nach rechts	[10^6 Gauß]	[10^6 Gauß · Oersted]

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Es darf als besonderes Verdienst des Verlages gewertet werden, wenn nunmehr der erste Band des auf fünf Teile geplanten *Lehrbuches der allgemeinen Elektrizitätslehre* in deutscher Fassung vorliegt. Die große Wertschätzung, die der einzige bisher im Deutschen erschienene vierte Band – Theoretische Elektrotechnik – bei Physikern und Elektrotechnikern gefunden hat, ermunterte den Verfasser, der deutschen Übersetzung eine sorgfältig überarbeitete Fassung der „*Grundbegriffe – Grundgesetze*“ zugrunde zu legen und die Übersetzungsarbeit im einzelnen zu überwachen.

Der vorliegende Einführungsband verfolgt in klaren Einzelschritten das Wesen von elektrischem und magnetischem Feld und bietet in vollendeter Klarheit die Ableitung der Grundgesetze der Elektrodynamik. Mit bemerkenswertem Geschick versteht es der Verfasser, die inneren Zusammenhänge der einzelnen Abschnitte in moderner Auffassung und leicht faßbar darzustellen und den Leser in die besonderen mathematischen Methoden einzuführen, welche die Berechnung der magnetischen und elektrischen Felder erfordert. Die Darstellung geht weit über die Ableitung der Grundgesetze hinaus und bringt eine Fülle sorgfältig ausgewählter Anwendungsbeispiele, die den Benutzer des Buches mit aktuellen Aufgaben der Elektrotechnik und Kernphysik bekannt machen.

Infolge der äußerst anschaulichen Behandlung, der vielen in den Text eingestreuten *Beispiele* und *Ergänzungen* sowie der mit großer Sorgfalt entworfenen Abbildungen ist dieses Werk hervorragend für ein eingehendes Selbststudium geeignet und stellt *das* Fundament für das Studium der wesentlich anspruchsvolleren weiteren Bände des Gesamtwerkes von SIMONYI dar.

F. X. EDER

Vorwort

Der Aufbau dieses Buches wird durch die grundlegenden MAXWELLschen Gleichungen bestimmt. Am Anfang jedes Kapitels von einfachen Erfahrungstatsachen ausgehend, gelangt man am Ende des Kapitels zu einer der MAXWELLschen Gleichungen in einer rudimentären oder bereits in der vollendeten Form. Daraus ergibt sich von selbst eine Betonung der Feldseite der elektrischen Erscheinungen.

Die Grundbegriffe werden durch die Meßvorschrift definiert, durch die die betreffenden Größen gemessen werden können. Dadurch vermeidet man von vornherein die Verwechslung solcher Größen wie $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$. Das Verhalten dieser Feldgrößen in Anwesenheit von Materie wird besonders ausführlich behandelt. Die Gesetze der Netzwerke werden als Folge der Feldgleichungen eingeführt und nur wenig auf praktische Probleme angewandt.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß das Ziel des Buches trotz der zahlreich angeführten Beispiele mehr in einer Begründung der Grundbegriffe und Grundgesetze der Elektrotechnik als in ihrer unmittelbaren praktischen Anwendbarkeit liegt. Das Buch könnte somit als Vorstufe zu einem praktischen Fachbuch, mehr noch zu einem theoretischen Werk dienen. So beginnt z. B. mein Buch „Theoretische Elektrotechnik" gerade dort, wo das vorliegende Buch endet. Die beiden Bände bilden gewissermaßen eine höhere Einheit.

Allen Mitarbeitern möchte ich meinen herzlichen Dank aussprechen. Besonderer Dank gebührt den Mitarbeitern des Lehrstuhls für Theoretische Elektrotechnik – in erster Linie Herrn Dr. G. FODOR, der die meisten der Beispiele zusammengestellt hat – sowie den Herren K. GÉHER und I. VÁGÓ für die vielen nützlichen Hinweise und Frau AGNES MÉREY für die Konstruktion und Ausführung der Abbildungen. Gleichfalls danke ich dem Bearbeiter der

deutschen Ausgabe, Herrn Dr. G. LIST, für seine Bemühungen um die deutsche Ausgabe.

Schließlich ist es mir eine angenehme Pflicht, dem Verlag für die sorgfältige Ausstattung des Buches und für sein verständnisvolles Eingehen auf alle meine Wünsche meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Budapest, im Dezember 1962

K. SIMONYI

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

1.1. Die Bedeutung der elektrischen Energie

Zur Beschreibung von Naturerscheinungen wurden in der Physik stets Begriffe benutzt, die aus den Erfahrungen des täglichen Lebens gewonnen und dort verwendet wurden. Die Grundbegriffe der Mechanik, wie Weg, Geschwindigkeit, Masse, Kraft, sind längst jedem von uns aus Anschauung und Gefühl heraus vertraut. Auch geschichtlich waren es die Erscheinungen der Mechanik, die die Menschheit von allgemeingültigen Lebenserfahrungen zu den Anfängen ersten physikalischen Denkens führten. So erhielten diese Begriffe als erste in der Naturwissenschaft eine genau definierte quantitative Deutung. Elektrische Erscheinungen, wie die furchterregenden und unbeeinflußbaren Blitze, begegneten den Menschen dagegen nur selten, und Versuche kann man mit ihnen tatsächlich erst seit zwei Jahrhunderten anstellen. Heutzutage aber wird unser tägliches Leben von elektrischen Phänomenen ebenso durchdrungen wie das unserer Vorfahren von mechanischen Erscheinungen. Dies spiegelt sich sowohl in der Wissenschaft wider, die für die Beschreibung elektrischer Erscheinungen wohldefinierte Begriffe erarbeitete, wie auch im Alltag, wo diese Begriffe im Laufe der Zeit in der Umgangssprache ihren festen Platz erhielten. Damit schwindet in zunehmendem Maße die Notwendigkeit, die elektrischen Erscheinungen mit Hilfe der Gesetze und Begriffe der Mechanik zu erklären und durch diese zu begreifen. Etwas erklären heißt, den zwischen mehreren Größen bestehenden Zusammenhang mit Hilfe erfahrungsgemäß für wahr geltender Grundgesetze logisch richtig auf wenige Größen zurückzuführen. Eine Erklärung hat aber nicht nur logisch richtig zu sein, sondern muß, in geeignete Form gebracht, auch das Gefühl des Begreifens erwecken. Wir trachten stets danach, die neue Erscheinung in unsere bekannte Erfahrungswelt so einzufügen bzw. auf bekannte Grundbegriffe so zurückzuführen, daß sie von uns gefühlsmäßig als „natürlich", als „selbstverständlich" aufgenommen wird. Dieses „Selbstverständlichsein" ergibt sich ausschließlich aus der Gewohnheit. So kommt es, daß man bestrebt war, die elektrischen Erscheinungen auf mechanische Grunderscheinungen zurückzuführen, weil diese – da man an sie gewöhnt war – als „natürlich" angesehen wurden. Die Erfahrungen zeigten aber bald, daß sich die elektrischen Erscheinungen in ihrer Gesamtheit nicht auf mechanische Grunderscheinungen zurückführen lassen. Die elektrischen Grundgesetze, die mindestens genauso logisch und

einfach aufgebaut sind, sind deshalb auch heute noch ungewohnter als die Grundgesetze der Mechanik. Unsere Erklärung ist umsonst logisch vollständig, wenn sie in uns nicht gleichzeitig das Gefühl des Verständnisses zu erwecken vermag. Dieses Gefühl kann man nur dadurch gewinnen, daß man sich sehr ausführlich mit den Grundgesetzen der Elektrotechnik beschäftigt.

Die elektrische Energie beeinflußt sowohl unser Privat- als auch unser gesellschaftliches Leben. Die Behaglichkeit unseres Heimes wurde durch immer neue und bessere elektrische Geräte gefördert: Beleuchtung, Heizung, Sauberkeit und musikalische Unterhaltung sind seit Verwendung der elektrischen Energie zur angenehmen Bequemlichkeit geworden. Berücksichtigt man dabei noch, daß die in einem Großstadthaushalt verbrauchte elektrische Energie monatlich durchaus 150 kWh erreichen kann, so bedeutet dies, daß dort von elektrischen Geräten tagsüber ständig etwa 500 W geleistet werden. Wenn man sich überlegt, daß die durchschnittliche mechanische Leistungsfähigkeit eines Menschen zwischen 40 und 70 W liegt, so folgt daraus, daß wir von der elektrischen Energie auf eine Art bedient werden, als ob ständig zehn Menschen für uns sorgten (Abb. 1).

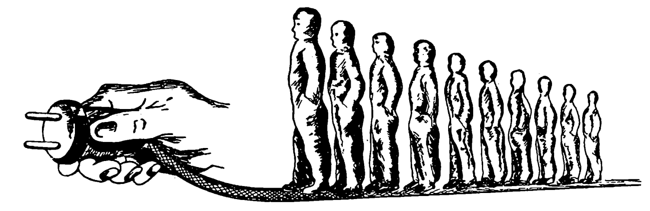


Abb. 1. Die elektrische Energie aus der Steckdose ersetzt die Arbeit von zehn Menschen

Ganz entsprechend wird auch von der Industrie in ständig wachsendem Maße elektrische Energie verbraucht. Die Abb. 2 zeigt, wie sich seit der Jahrhundertwende der elektrische Energieverbrauch der Erde gestaltete. Man kann heute behaupten, daß der größte Teil der für ortsgebundene maschinelle Arbeiten verwendeten Energie als elektrische Energie zum Verbraucher gelangt.

Aus welchem Grund hat nun die elektrische Energie eine derart weite Verbreitung erfahren? Man wird später bei den verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten sehen, welche Vorteile die elektrische Lösung eines Energieproblems in der Technik anderen Lösungen gegenüber besitzt. An dieser Stelle sei lediglich auf einige grundlegende Eigenschaften hingewiesen:

Elektrische Energie kann leicht und über große Entfernungen mit gutem Wirkungsgrad und bei verhältnismäßig geringen Investitionen transportiert werden.

Mitunter ist die Ausnutzung einer Energiequelle ohne die Umwandlung der Energie in Elektrizität gar nicht möglich. So kann z. B. die Wasserenergie in Berggegenden, wo die Errichtung von Industrieanlagen nicht möglich ist, nur

durch Vermittlung über die elektrische Energie ausgenutzt werden. In Wärmegroßkraftwerken kann eine Kohlensorte oft auch dann noch wirtschaftlich verarbeitet werden, wenn sie einen besonders geringen Heizwert hat. Eben

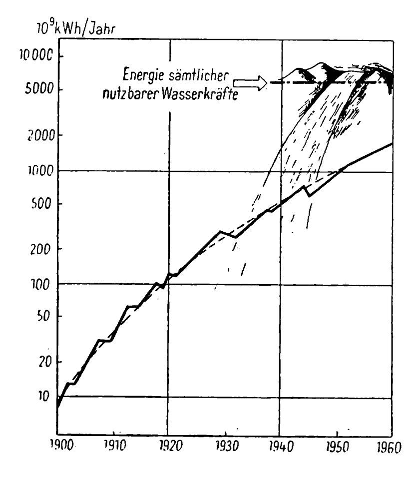


Abb. 2. Der Verbrauch an elektrischer Energie erreichte bis heute den Wert 10^{12} kWh, was einer Leistung von 10^5 MW entspricht

deshalb ist die Elektrifizierung der Bahnen zweckmäßig; der Wirkungsgrad einer elektrischen Lokomotive liegt nämlich – unter Berücksichtigung des Wirkungsgrades der Energieerzeugung und des Energietransportes – bei etwa 15%, während der Wirkungsgrad der Dampflokomotive nur etwa 5 bis 6% beträgt.

In Abb. 3 ist der Wirkungsgrad der Erzeugung, des Transportes und der Nutzung elektrischer Energie mit dem Wirkungsgrad einer Energie verglichen, die im Bergbau neben der elektrischen Energie weit verbreitet ist, nämlich der der Preßluft. Man sieht, daß die elektrische Energie mit einem besseren Wirkungs-

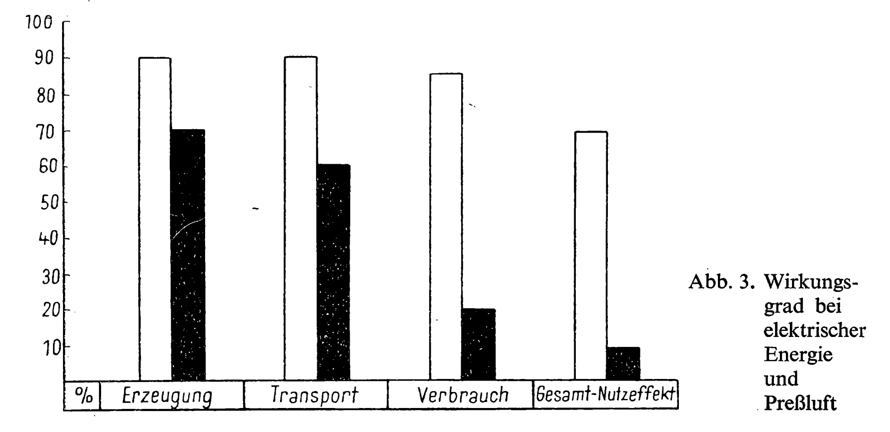


Abb. 3. Wirkungsgrad bei elektrischer Energie und **Preßluft**

grad erzeugt und transportiert werden kann; der wesentliche Unterschied ergibt sich aber aus Spalte 4, nach der der Gesamtnutzeffekt elektrischer Energie etwa 70%, der Gesamtnutzeffekt der Preßluft dagegen weniger als 10% beträgt.

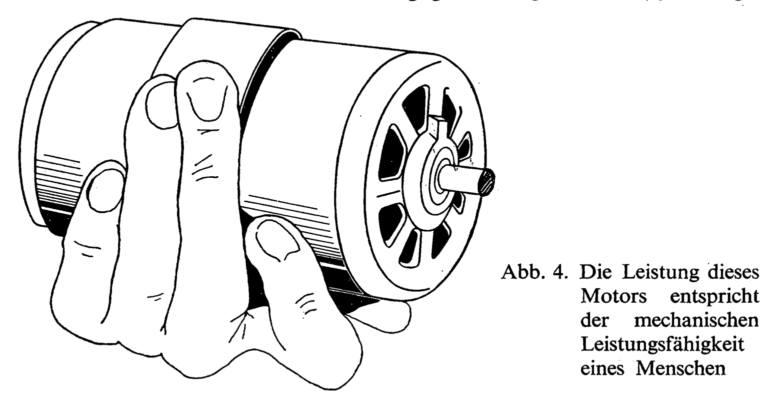


Abb. 4. Die Leistung dieses Motors entspricht der mechanischen Leistungsfähigkeit eines Menschen

Eine weitere hervorragende Eigenschaft der elektrischen Energie ist ihre „Anpassungsfähigkeit“. Die elektrische Energie ist sehr einfach und leicht regelbar und läßt sich mit gutem Wirkungsgrad in jede andere Energieform überführen. Mit der elektrischen Energie verfügen wir gleichzeitig auch über Licht-, Wärme-, mechanische, chemische und jede andere Energie. Bei größeren Leistungen liegt der Wirkungsgrad der Energieumformung meist bei etwa 90%.

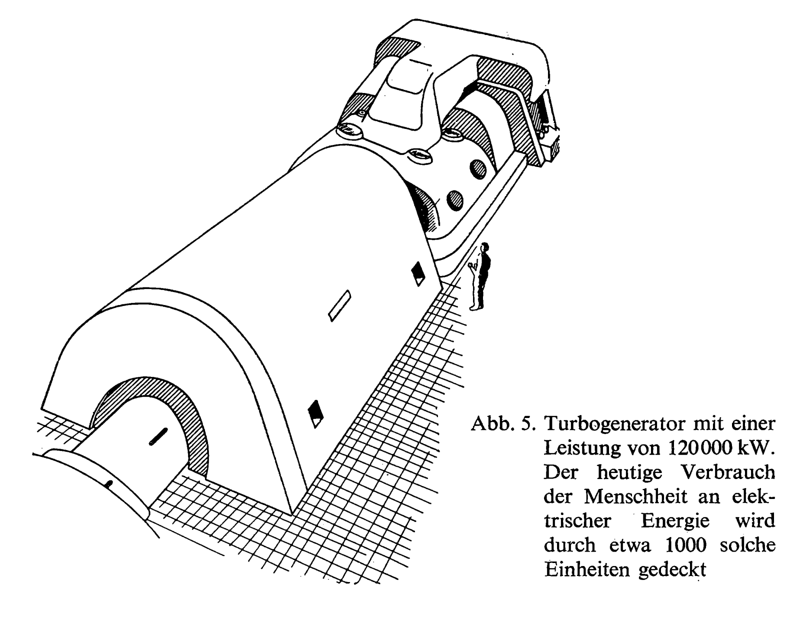


Abb. 5. Turbogenerator mit einer Leistung von 120000 kW. Der heutige Verbrauch der Menschheit an elektrischer Energie wird durch etwa 1000 solche Einheiten gedeckt

Welche Energieform wir auch immer benötigen, stets läßt sie sich aus elektrischer Energie bei geringem Raumbedarf, gutem Wirkungsgrad, leicht regelbar, ohne Verunreinigung, d. h. ohne jegliche Verbrennungs- oder andere Nebenprodukte, herstellen. In Abb. 4 ist ein Motor von 60 W dargestellt. Dies entspricht ungefähr der durchschnittlichen mechanischen Leistung eines Menschen. Ein Turbogenerator von 120000 kW, wie er in Abb. 5 dargestellt ist, besitzt eine Leistungsfähigkeit, die der physischen Arbeit von 2000000 Menschen gleichkommt.

Elektrische Geräte haben nicht nur als Energieerzeuger oder Energieverbraucher Bedeutung. Die elektronische Industrie, die in letzter Zeit wirtschaftspolitisch der Schwerindustrie an Bedeutung sehr nahegekommen ist, bildet sozusagen das Nervensystem der komplizierten Maschinen eines großen Werkes, ja darüber hinaus der Wirtschaft eines ganzen Staates. Es genüge die Bemerkung, daß fast die Hälfte der Kosten eines modernen Flugzeuges auf die elektronischen Einrichtungen entfällt.

1.2. Die einfachsten Begriffe und Gesetze der Elektrotechnik

Durch den täglichen Umgang mit elektrischen Geräten im Haushalt und am Arbeitsplatz sind einige Begriffe aus der Elektrotechnik längst zum Allgemeingut geworden. Wenn man z. B. eine Glühlampe kauft, nennt man den Anschlußwert der *Spannung* und die gewünschte *Leistungs*aufnahme. Man bedient sich dabei der Einheiten *Volt* und *Watt*. Die verbrauchte *elektrische Energie*, vom elektrischen Zähler in *Kilowattstunden* gemessen, muß in regelmäßigen Abständen bezahlt werden. Ein einfaches Gerät, z. B. eine Lampe, kann von jedermann an das elektrische Netz angeschlossen werden, indem über ein Kabel und einen Stecker eine Verbindung zur Steckdose hergestellt wird. Über das Zuleitungskabel und durch den Glühdraht der Lampe fließt dann infolge der an den Polen der Steckdose liegenden Spannung ein *Strom*, dessen Stärke man in *Ampere* messen kann.

Die (effektive) Netzspannung hat einen konstanten Wert. Werden Verbraucher verschiedener Leistungsaufnahme an das Netz angeschaltet, so fließen durch sie verschieden starke Ströme. Man sagt, daß die Stromstärke vom *Widerstand* des Verbrauchers abhängt, der dem Stromfluß bei einer bestimmten Spannung entgegenwirkt. Die Erfahrung lehrt, daß die Stromstärke um so kleiner ist, je größer der Widerstand ist. Bei einem unendlich großen Widerstand, z. B. einem Kabelbruch, kann überhaupt kein Strom fließen, die Stromstärke ist Null.

So werden also die elektrischen Grundbegriffe Spannung, Strom, Leistung, Widerstand und elektrische Energie auch im täglichen Leben verwendet. Über

das Wesen des elektrischen Stromes haben wir darüber hinaus eine bestimmte Vorstellung:

Den metallischen Leiter denken wir uns aus Metallkristallen, z. B. aus Kupferkristallen, zusammengesetzt. In den Gitterpunkten der Kristalle befinden sich positiv geladene Metallionen, zwischen denen sich negativ geladene Elektronen frei bewegen können (Abb. 6). Wird an den Leiter eine Spannung angelegt, setzen sich die Elektronen in einer Richtung in Bewegung, stoßen mit den Gitterionen zusammen und erhöhen so deren Energie. Auf diese Weise entsteht der Strom und die von ihm bewirkte *Erwärmung* des Leiters. Die dabei aufgebrachte Wärmeleistung ist dem Quadrat der Stromstärke und dem Widerstand des Leiters proportional.

Beim Durchgang eines elektrischen Stromes durch Lösungen von Salzen, Säuren oder Laugen werden an den Stromzuführungen (Elektroden) Stoffe ausgeschieden. Dies ist die *chemische Wirkung* des elektrischen Stromes. Die abgeschiedene Stoffmenge ist der Stromstärke und der Zeit proportional, während der der Strom durch die Lösung fließt.

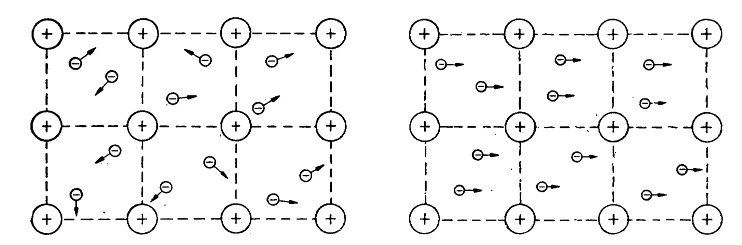


Abb. 6. Die freien Elektronen eines metallischen Leiters bewegen sich unregelmäßig (*links*); unter dem Einfluß einer angelegten Spannung wird aber eine Richtung bevorzugt: Es fließt ein Strom (*rechts*)

Ein elektrischer Strom beeinflußt eine in seine Nähe gebrachte Magnetnadel, Eisenfeilspäne oder auch einen benachbarten Stromkreis. Dies ist die *magnetische Kraftwirkung* des Stromes. Sie ist von der Stromstärke und von der geometrischen Anordnung abhängig. In der Nähe eines sehr langen geraden Leiters ist sie dem vom Leiter senkrecht gemessenen Abstand umgekehrt proportional.

Im Zusammenhang mit den Eigenschaften des Stromes lassen sich die Stoffe nach elektrischen Gesichtspunkten einteilen. Der Strom fließt in einem *Leiter*, der durch einen *Isolator* von anderen Leitern isoliert ist; die magnetische Wirkung des Stromes wird durch *magnetische Stoffe* gesteigert.

Den Erscheinungen, die mit ruhenden elektrischen Ladungen verbunden sind, begegnet man im Alltag – außer beim Gewitter – seltener. Sie treten meist als störende Erscheinungen auf. So können sie z. B. in der Seidenindustrie

eine Verwirrung der Fäden herbeiführen, oder Metallteile können von Förderbändern aus Gummi aufgeladen werden, wodurch Brände oder in Gruben Schlagwetterexplosionen verursacht werden können. Die gespeicherte elektrische Ladung beeinflußt andere elektrische Ladungen, die in ihre Nähe gebracht werden. Hierin drückt sich die *elektrostatische Kraftwirkung* der elektrischen Ladung aus. Sie ist bei punktförmig konzentrierten Ladungen der Größe der Ladungen direkt, dem Quadrat ihres gegenseitigen Abstandes umgekehrt proportional.

Die magnetische Kraftwirkung, die über den Stromkreis des Leiters hinausgeht, und die elektrische Kraftwirkung einer Ladung, die im Raum außerhalb der Ladung zu beobachten ist, lassen sich durch die Begriffe des *magnetischen* und *elektrischen Feldes* veranschaulichen: Der Strom bzw. die Ladung erzeugt in ihrer Umgebung Felder, in denen ein zweiter Stromkreis bzw. eine zweite Ladung eine Kraft erfahren. Die Wirkung erfolgt also gewissermaßen in zwei Schritten: Das magnetische und das elektrische Feld existieren in der Umgebung eines Stromes bzw. einer Ladung. Wird in diese Felder ein anderer Stromkreis bzw. eine andere Ladung gebracht, so wirken auf sie *auf Grund des existierenden Feldes* Kräfte. Diese *Feldwirkung* ist also eine *Fernwirkung*, bei der nicht mehr nach der Ursache für die Existenz des Feldes gefragt zu werden braucht.

1.3. Die Definition der elektrischen Begriffe

Die exakte Definition eines beliebigen Begriffes soll auch stets die Vorschrift enthalten, wie die diesem Begriff entsprechende physikalische Größe – zumindest prinzipiell – gemessen werden kann. Erst so wird jede Definition eindeutig und unser Wissen um den Sachverhalt zur exakten Kenntnis, da wir uns bei der Entscheidung über die Gültigkeit einer aufgestellten Behauptung auf die Messung, also auf einen unumstößlichen Urteilsspruch, stützen können.

Dabei müssen wir jedoch bedenken, daß eine Entscheidung nur durch eine *exakt* durchgeführte und *richtig* gedeutete Messung gefällt werden kann.

Nachdem die Grundgesetze der Physik verschiedene physikalische Größen miteinander verbinden, können durch die Messung einiger *Grundgrößen* auch die übrigen Größen gemessen werden. In der Mechanik gelten als Grundgrößen die *Länge*, die *Masse* und die *Zeit*. Um diese Grundgrößen messen zu können, wurden Maßeinheiten bestimmt, mit denen eine gegebene Länge, Masse oder Zeit verglichen werden können.

Die Längeneinheit ist das Meter (m), die Masseeinheit das Kilogramm (kg) und die Zeiteinheit die Sekunde (s).

Damit sind auch die Grundmeßgeräte der Mechanik, der Meterstab, die Waage und die Uhr, bestimmt (Abb. 7). Mit einer Hebelwaage werden zwei *Massen* verglichen, indem die *Kräfte* verglichen werden, die an den Massen im Gravitationsfeld angreifen. Man mißt also mit einer Waage eine Kraft. Die Kraft, die an einem Körper im Gravitationsfeld angreift, nennt man das *Gewicht* des Körpers. Eine Federwaage ist eine Kraftmeßfeder (Dynamometer),

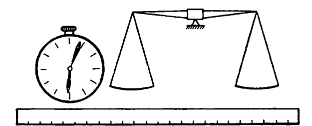


Abb. 7. Grundlegende Meßinstrumente der Mechanik

deren Dehnung dem Gewicht eines Körpers proportional ist. Da gleiche Massen bei gleicher Gravitationskraft, also an gleichen Orten, das gleiche Gewicht haben, kann man mit Hilfe einer Federwaage auch die Masse eines Körpers bestimmen.

Alle übrigen Einheiten der mechanischen Größen lassen sich aus den genannten Grundeinheiten herleiten: Die Einheit der Geschwindigkeit ist 1 m/s, die Einheit der Beschleunigung 1 m/s^2. 1 Newton (N) = 1 mkg/s^2 ist die Einheit der Kraft. Es ist die Kraft, die der Einheitsmasse 1 kg die Einheitsbeschleunigung 1 m/s^2 erteilt. 1 Joule (J) = 1 m^2kg/s^2 ist die Einheit der Arbeit. Sie wird von der Kraft 1 N längs des in ihrer Richtung liegenden Weges von 1 m geleistet. Die Leistungseinheit ist 1 Watt (W) = 1 m^2kg/s^3. Das ist diejenige Leistung, die durch die Kraft 1 N geliefert wird, wenn sie einen Weg von 1 m in 1 s zurücklegt. Somit ist

$$1\,\mathrm{W} = \frac{1\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}}.$$

Diese Einheiten der mechanischen Größen ergeben das Meter-Kilogramm-Sekunde-Maßsystem (MKS-System).

Die elektrischen Grundgrößen lehnen sich über mehrere Gleichungen an die mechanischen Größen an. Zur eindeutigen Definition muß noch die Einheit einer beliebigen elektrischen Größe als Grundeinheit hinzugefügt werden. Wir verwenden die Einheit der Stromstärke, das Ampere. Die Grundmeßgeräte der Elektrodynamik sind dann der Meterstab, die Uhr, die Waage und der Strommesser (Abb. 8).

Da sich die physikalischen Erscheinungen zeitlich und räumlich abspielen, ist es offensichtlich zweckmäßig, Uhr und Meterstab als Grundmeßgeräte zu

wählen. Es taucht aber die Frage auf, ob man in der Elektrotechnik statt der Waage oder des Kraftmessers kein anderes geeignetes Meßgerät benutzen könnte. Dies ist prinzipiell möglich. Das Produkt aus Stromstärke und Spannung ist die Leistung:

$$U \cdot I = P.$$

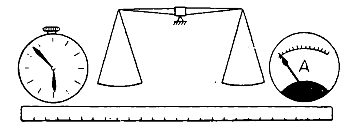


Abb. 8. Die theoretisch grundlegenden Meßinstrumente der Elektrizitätslehre

Die Einheit der Leistung ist das Watt. Also gilt auch

$$1\,\mathrm{VA} = 1\,\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}}.$$

Daraus folgt

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{VAs}}{\mathrm{m}}.$$

Die Kraft kann also durch die vorher schon eingeführten Grundeinheiten Meter, Sekunde und Ampere sowie die neu eingeführte Grundeinheit der Spannung, das Volt, ausgedrückt werden. Der Kraftmesser bzw. die Waage werden als Grundmeßgerät ausgeschieden, weil wir die Einheiten sämtlicher Größen mit den Einheiten der Länge, der Zeit, der Stromstärke und der Spannung ausdrücken können. Im Endergebnis sind also in der Elektrotechnik die Uhr, der Meterstab, der Spannungsmesser und der Strommesser die Grundmeßgeräte (Abb. 9).

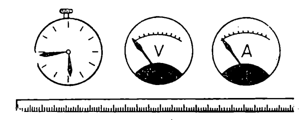


Abb. 9. Die praktischen grundlegenden Meßinstrumente der Elektrizitätslehre

Bei der Definition der einzelnen Begriffe geht man jedoch nicht von diesen vier Grundeinheiten bzw. Grundgeräten aus; vielmehr wird anfangs an Stelle des Spannungsmessers das Kraftmeßgerät oder das diesem gleichwertige Momentenmeßgerät benutzt. Die Zweckmäßigkeit der vorstehenden Behandlungsmethode liegt darin, daß die elektrischen Begriffe vom mechanischen Kraftbegriff unabhängig aufgebaut werden können. Man kann sogar, wie es POHL ausdrückte, sagen, daß man die Spannungs- und Strommesser für Spannungs- und Stromstärkemessungen, auch ohne deren innere Konstruktion zu kennen, zu benutzen vermag, wie auch die Uhr ohne jede Besorgnis

verwendet wird, ohne daß man sich über deren innere Konstruktion im klaren wäre. Dies ist wahr, es besteht aber ein großer Unterschied zwischen der Benutzung der Federwaage oder der Uhr als Meßgerät und der Verwendung eines Spannungs- und Strommessers. Die Uhr, die Kraftmeßfeder, der Meterstab können von jedermann gehandhabt werden, es kann ein jeder mit ihnen messen. Der Umgang mit Spannungs- und Strommesser ist für uns aber keinesfalls eine gewohnte Tätigkeit. Deshalb legen wir zunächst die willkürliche Einheit der Stromstärke mit Hilfe der Uhr, der Federwaage und des Meterstabes fest, eichen damit einen Strommesser, lernen ihn richtig handhaben und gehen auf die rein elektrischen Grundeinheiten erst dann über, wenn der Begriff der Spannung geklärt ist und wir die Funktion des Spannungsmeßgerätes kennengelernt haben.

Für die Kraftmeßfeder spricht auch eine prinzipielle Begründung: Die mit der Definition der Begriffe zusammenhängende Meßanweisung ist zwar nur eine prinzipielle Anleitung, sie soll aber nach Möglichkeit mit der praktischen Meßanleitung zusammenfallen oder dieser annähernd gleich sein. Die Einheit der Stromstärke z. B. wird in der Präzisionsmeßtechnik der Praxis nicht über die Energie, sondern über die Kraftwirkung festgesetzt.

1.4. Aufbau dieses Buches

Die elektrischen Begriffe werden aus den Eigenschaften des magnetischen und des elektrischen Feldes abgeleitet. Dazu soll zunächst der Zusammenhang zwischen Strom und magnetischem Feld behandelt werden. Aus diesem Zusammenhang soll die Einheit der Stromstärke definiert, das Strommeßgerät aufgebaut und sodann das magnetische Feld gemessen werden. Kennt man bereits den Strommesser, so kann ein Gerät zur Messung der elektrischen Ladung konstruiert werden und auch deren Feld, das elektrostatische Feld, untersucht werden. Die Tatsache, daß durch bewegte Ladungen ein Magnetfeld erzeugt wird, läßt schon vermuten, daß zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld ein innerer Zusammenhang besteht. Über die Stromdichte liegt ein indirekter Zusammenhang vor: Durch das elektrische Feld im Innern eines Leiters wird der Strom, durch diesen wiederum ein magnetisches Feld erzeugt. Wir werden einen direkten Zusammenhang finden, wenn durch die zeitliche Veränderung des magnetischen Feldes ein elektrisches Feld erzeugt wird und die Änderung des elektrischen Feldes schließlich von einem magnetischen Feld begleitet wird.

Ist schließlich noch die Energie der elektrischen und magnetischen Felder besprochen, so sind uns die Grundgesetze bekannt, und alles übrige umfaßt im wesentlichen die Anwendung der gewonnenen Kenntnisse.

2. Strom – Magnetisches Feld

2.1. Die Einheit der Stromstärke. Das Strommeßgerät

Will man die Eigenschaften des Stromes untersuchen, muß man natürlich zunächst über eine Einrichtung verfügen, die eine für unsere Versuche geeignete Stromstärke liefern kann. Es wird vorausgesetzt, daß eine solche Stromquelle vorhanden ist; ihr innerer Aufbau soll hier nicht untersucht werden. Für unsere Versuche stehen uns also eine Akkumulatorenbatterie und die Grundmeßgeräte Uhr, Meterstab, Waage oder Kraftmeßfeder zur Verfügung. Ferner benötigen wir einen Verbraucher, der ein Widerstand sein kann, und zur Herstellung eines Stromkreises Kupferdraht (Abb. 10). Mit diesen Mitteln ausgestattet, sind wir in der Lage, die Gesetzmäßigkeiten des mit einem Gleichstrom verbundenen magnetischen Feldes zu bestimmen.

Unsere erste Aufgabe besteht darin, die Einheit der Stromstärke festzulegen, um danach das Strommeßgerät konstruieren und die Gesetzmäßigkeit quantitativ untersuchen zu können. Die Einheit der Stromstärke kann willkürlich gewählt werden, indem von einer beliebigen, allerdings genau definierten

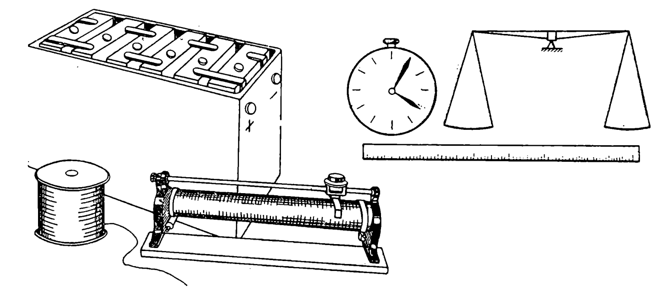


Abb. 10. Experimentelle Ausrüstung und Meßinstrumente zur Untersuchung des magnetischen Feldes eines elektrischen Stromes

Stromstärke erklärt wird, diese sei die Einheit der Stromstärke. Bei dieser Festlegung wird man zweckmäßig praktische und herkömmliche Gesichtspunkte berücksichtigen. Für die im Alltag vorkommenden Werte der Stromstärke sollen sich weder zu große noch zu kleine Werte ergeben, und mit anderen wichtigen Einheiten soll sie in einem möglichst einfachen Zusammen-

hang stehen. Durch diese Übereinkunft wird unser Prinzip nicht beeinträchtigt: Die Einheit läßt sich prinzipiell frei wählen. Eine andere Frage ist, wie die Größe dieser Einheit festgelegt werden soll; sie kann nicht in einem Schrank aufbewahrt werden, damit sie uns dort stets zur Verfügung steht.

Zur Festlegung der Stromstärkeeinheit kann jede beliebige Stromwirkung benutzt werden. Bis vor nicht allzulanger Zeit wurde die chemische Wirkung des Stromes verwendet. Heute wird die Einheit der Stromstärke aus der elektrodynamischen Wirkung des Stromes definiert. Die Erfahrung hat gelehrt, daß zwei vom Strom durchflossene Stromkreise oder Leiterstücke aufeinander eine Kraft ausüben, die von der Größe dieser Ströme und von der geometrischen Anordnung abhängt. Die geometrische Anordnung wird folgendermaßen gewählt (Abb. 11): Der Strom wird durch zwei sehr lange, parallele Leitungen geführt, die als unendlich lang angesehen werden können. Ein Stück der einen Leitung von Einheitslänge ist frei beweglich, um die auf dieses Leiterstück wirkende Kraft messen zu können. Dazu wird das Leitungsstück an die übrigen Teile der Leitung entweder über zwei Quecksilbernäpfe

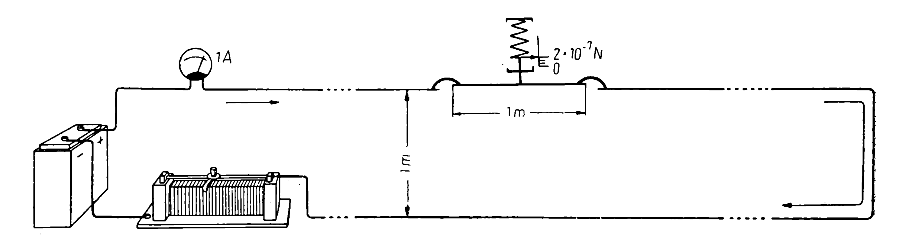


Abb. 11. Schaltungsschema zur Bestimmung der Einheitsstromstärke

oder mittels zweier flexibler Kabelstücke, die keine Rückstellkräfte ausüben können, angeschlossen. Wird durch die andere Leitung der gleiche Strom zurückgeführt, so hängt die auf das Leitungsstück einwirkende Kraft nur von diesem Strom ab. Die Richtung der Kraft steht in der Ebene der beiden Leiter auf dem Leiterstück senkrecht. Nun läßt sich die Einheit der Stromstärke schon definieren:

Die Einheit der Stromstärke ist das Ampere (A). Eine Stromstärke von 1 A fließt in einem Leiter, wenn auf einen 1 m langen Abschnitt eines zu ihm im Abstand von 1 m parallel angeordneten zweiten Leiters eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N ausgeübt wird und in beiden Leitern der gleiche Strom fließt. Beide Leiter werden dabei als unendlich lang angenommen.

Um ein Strommeßgerät, das auf Grund einer beliebigen Wirkung konstruiert wurde, eichen zu können, müssen wir vor allem auch beliebige Vielfache der Einheit herstellen können. Da wir noch kein Strommeßgerät besitzen, entsteht

die Frage, wie wir bestimmen können, wann im Leiter das Zweifache oder ein anderes Vielfaches des ursprünglichen Stromes fließt. Aus der Kraftwirkung selbst kann dies offensichtlich nicht ermittelt werden, weil die weiteren Versuche gerade darüber Aufschluß geben sollen, wie diese Kraftwirkung von der Größe der Stromstärke abhängt. Aus dem gleichen Grund kann man auch keine andere Stromwirkung verwenden. Es läßt sich aber auf jeden Fall angeben, wann in zwei Stromkreisen dieselbe Stromstärke fließt, nämlich wenn in der Umgebung beider Stromkreise die gleichen Wirkungen wahrgenommen werden. Wir können also beliebig viele Stromkreise gleicher geometrischer Form herstellen, in denen gleiche Ströme fließen. Vereinigen wir zwei dieser Leiter zu einem Leiter, so fließt in diesem ein Strom von doppelter Stärke. Ebenso können wir natürlich auch mit beliebig vielen Leitern verfahren.

Wir könnten auch eine symmetrische Verzweigung des Leiters herstellen. Dann ist mit größter Sicherheit zu erwarten, daß sich der Strom gleichmäßig auf die einzelnen Zweige verteilt.

Damit können wir also im Prinzip jedes Vielfache und jeden Bruchteil der Stromeinheit herstellen. Die angenommene symmetrische Beeinflussung der Stromzweige untereinander kann natürlich bezweifelt werden. Wir möchten aber betonen, daß eine geschlossene physikalische Theorie nicht durch die experimentelle und begriffliche Richtigkeit einzelner herausgegriffener Sätze als richtig bewiesen wird. Vielmehr ist – da jedes einzelne Gesetz in den Rahmen der gesamten Theorie eng eingepaßt ist und unter Umständen von der Existenz anderer Teilgesetze abhängt – nur die Richtigkeit der ganzen Theorie einer experimentellen Nachprüfung zugänglich.

Nachdem nun die Stromstärke prinzipiell gemessen werden kann, kann auch ein Strommeßgerät, das den ihn durchfließenden Strom eindeutig und reproduzierbar anzuzeigen vermag, geeicht werden. Das Meßwerk eines solchen Gerätes kann wieder durch jede beliebige Stromwirkung betrieben werden. Es scheint am zweckmäßigsten, wenn unser Gerät auf die magnetische Wirkung des Stromes anspricht. In der Abb. 12 ist das Prinzip eines solchen Gerätes dargestellt. Es enthält eine feststehende Spule und eine Spule, die sich um eine Achse dreht, an der ein Zeiger befestigt ist. Der zu messende Strom wird zunächst durch die feststehende, dann durch die bewegliche Spule geleitet. Die Stromstärke soll auf die vorher beschriebene Weise gemäß Abb. 11 gemessen und ihr Wert bei der beobachteten Zeigerstellung eingetragen werden.

Hier, wie übrigens auch im ganzen Buch, wurde der Meßvorgang einer Größe so beschrieben, wie er im Prinzip auch in der Praxis durchgeführt wird. Die Strommesser werden heutzutage tatsächlich nach diesem Prinzip

endgültig geeicht. Es soll aber nachdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die beschriebenen prinzipiellen Versuchsanordnungen sehr stark schematisiert sind, um das Wesen des Meßvorganges hervorzuheben. Bei der praktischen Ausführung wird eine Messung oft durch nebensächliche Umstände gestört, mitunter sogar unmöglich gemacht.

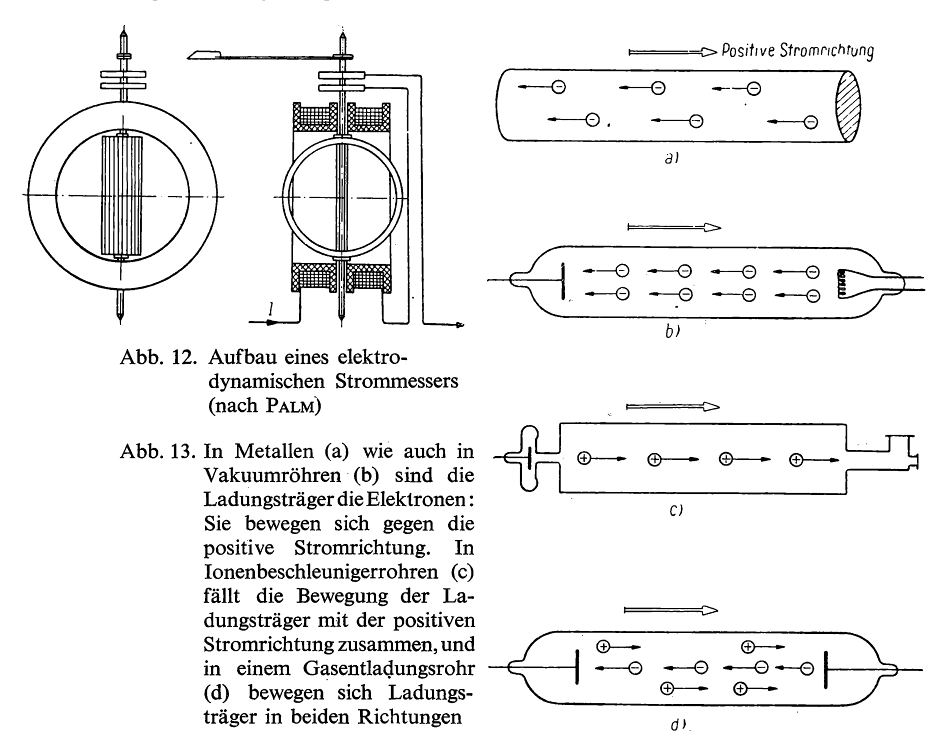


Abb. 12. Aufbau eines elektrodynamischen Strommessers (nach PALM)

Abb. 13. In Metallen (a) wie auch in Vakuumröhren (b) sind die Ladungsträger die Elektronen: Sie bewegen sich gegen die positive Stromrichtung. In Ionenbeschleunigerrohren (c) fällt die Bewegung der Ladungsträger mit der positiven Stromrichtung zusammen, und in einem Gasentladungsrohr (d) bewegen sich Ladungsträger in beiden Richtungen

Über die Richtung des Stromes wurde bisher noch nicht gesprochen. Aus der Kraftwirkung kann man feststellen, ob in den beiden Leitern gleich- oder entgegengerichtete Ströme fließen: Ströme gleicher Richtung ziehen sich an; Ströme, die in entgegengesetzter Richtung fließen, stoßen sich ab. Die Festlegung der positiven Richtung eines Stromes ist ausschließlich eine Frage des Übereinkommens. Wir nennen die Stromrichtung der positiv geladenen Teilchen positiv. Auf Grund der alten Definition der positiven Ladung, die mit den reibungselektrischen Erscheinungen in Zusammenhang steht, sind die Atomkerne positiv geladen, die Elektronen, die in den Metallen den Strom übermitteln, negativ geladen. Demnach verstehen wir unter positiver Richtung die der Elektronenströmung entgegengesetzte Richtung (Abb. 13).

In der Praxis kann man die Stromrichtung feststellen, indem man in den Stromkreis eine Diode einschaltet (Abb. 14). Fließt im Kreis überhaupt ein Strom, so kann dieser nur gegen den Glühfaden, die Kathode, fließen, weil sich die Elektronen nur von der Glühkathode zur Gegenelektrode, der Anode, hin bewegen können.

In der Abb. 15 auf Seite 16 ist abschließend gezeigt, welche Stromstärken unter welchen Umständen man in der Natur und im Alltag erwarten kann.

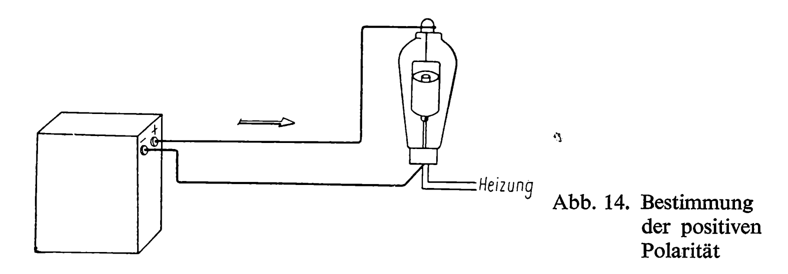


Abb. 14. Bestimmung der positiven Polarität

Beispiele und Ergänzungen

1. In einem metallischen Leiter wird ein elektrischer Strom durch die gerichtete Bewegung von Elektronen erzeugt. Nach Abb. 15 fließt ein Strom von $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ A, wenn in jeder Sekunde ein Elektron durch den Querschnitt des Leiters hindurchtritt. Daraus ergibt sich, daß bei einer Stromstärke von 1 A durch den Leiterquerschnitt $6{,}25 \cdot 10^{18}$ Elektronen pro Sekunde treten.

In der Elektronenphysik hat man es häufig mit Stromstärken von 10^{-6} A zu tun. In diesen Fällen ist die Teilchenzahl pro Sekunde noch $6{,}25 \cdot 10^{12}$. Man kann also den elektrischen Strom als eine kontinuierliche Flüssigkeitsströmung ansehen. Seine atomare Struktur macht sich durch die Schwankungseffekte, wie z. B. den Schroteffekt, bemerkbar.

2. Bei unseren Überlegungen betrachten wir eine Leitung meist als linear, d. h. als Leiter mit sehr kleinem Querschnitt; oder etwas schärfer formuliert: Die größte lineare Dimension des Leiterquerschnittes ist im Verhältnis zur vorkommenden Leitungslänge und zum gegenseitigen Abstand gering. In einem linearen Leiter wird die räumliche Richtung des Stromes durch den Leiter selbst bestimmt; es kann sich höchstens die Stromrichtung ändern. Wir werden aber auch ausgedehnten Leitern begegnen. Bei diesen werden die Strömungsverhältnisse im Innern nicht ausreichend durch die *Gesamtstromstärke* beschrieben. Zur vollständigen Beschreibung der Erscheinungen, die sich im Leiterinnern abspielen, ist es zweckmäßig, die *Stromdichte* anzugeben.

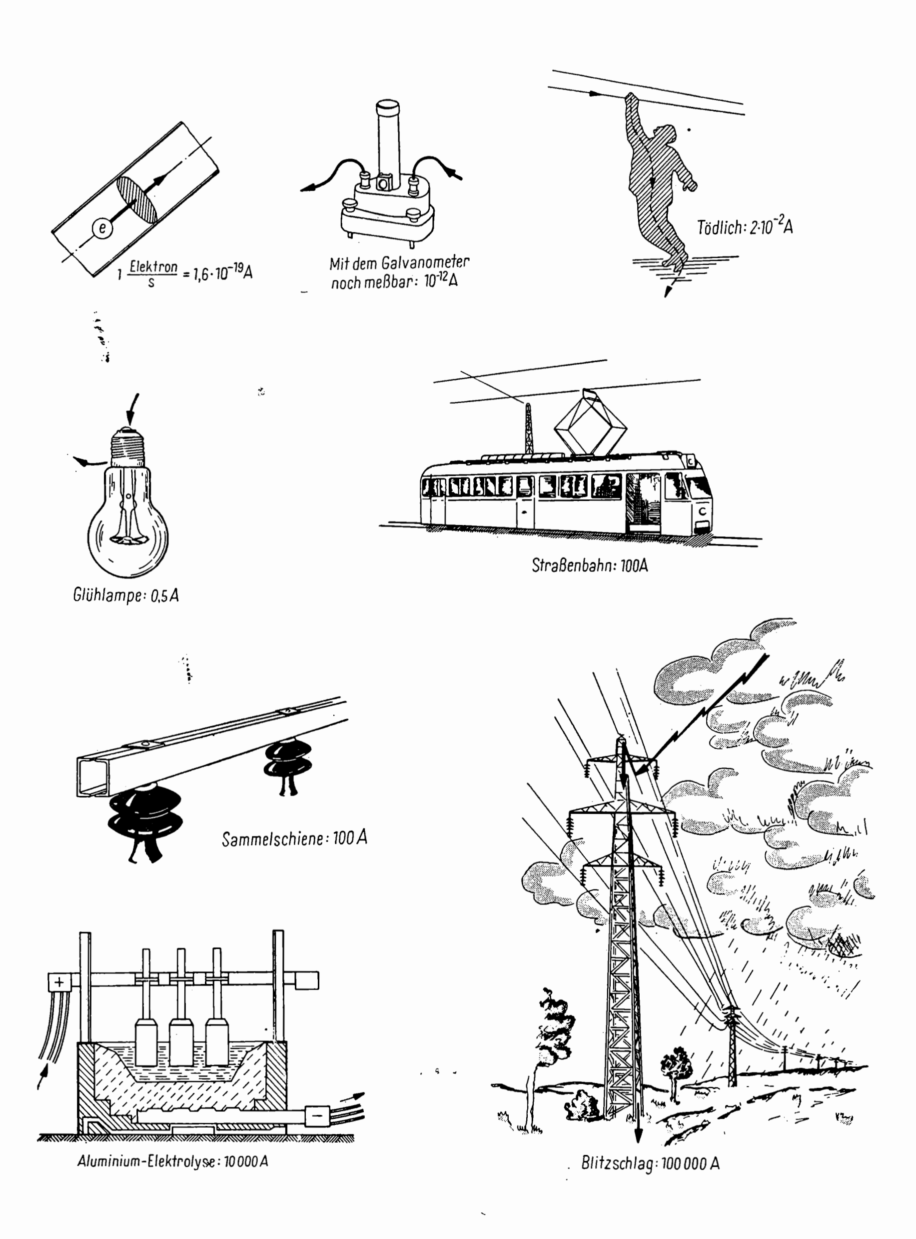


Abb. 15. In der Praxis vorkommende Stromstärken

Der Vektor der Stromdichte $\mathfrak{G}$ hat in beliebigen Punkten des Feldes die Richtung der Strömung, sein Betrag ist im homogenen Feld gleich der Stromstärke durch die auf dieser Richtung senkrecht stehende Einheitsfläche A:

$$G = \frac{I}{A}.$$

Im allgemeineren Strömungsfeld gilt

$$G = \frac{dI}{dA}.$$

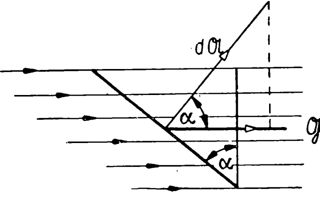


Abb. 16. Durch ein Flächenelement fließender Strom

Nach Abb. 16 geht durch das im Innern des Leiters befindliche Flächenelement $d\mathfrak{A}$ von beliebiger Richtung der Strom $\mathfrak{G}\, d\mathfrak{A}$ hindurch. Der Gesamtstrom, der durch die von einer geschlossenen Kurve berandete Fläche $\mathfrak{A}$ hindurchgeht, ist demnach

$$I = \int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A}.$$

Die Stromdichte, der man in der Praxis begegnet, fällt in die Größenordnung von 10^6 bis $10^7 \mathrm{A/m^2}$. Deshalb verwendet man besser die Dimension $\mathrm{A/mm^2}$.

3. Den scheinbaren circulus vitiosus, ein Meßgerät aus der Kenntnis von Naturgesetzen zu konstruieren, die erst mit Hilfe des Meßinstrumentes gefunden werden sollen, haben wir dadurch umgangen, daß wir plausible Symmetriegesetze vorwegnahmen. Wir können aber auch viel gröbere Annahmen machen und doch zu den richtigen Gesetzen kommen:

Wir definieren die Einheit der Stromstärke wie üblich nach Abb. 11 und lassen dann den Strom so lange wachsen, bis unser Kraftmesser 2mal, 3mal usw. $2 \cdot 10^{-7}$ N mißt. Die entsprechende Anzeige des Amperemeters können wir mit 2, 3 usw. Ampere bezeichnen. Damit haben wir ein Meßinstrument und können mit ihm Messungen vornehmen. Allerdings werden wir auf sehr sonderbare Gesetzmäßigkeiten stoßen: Bei symmetrischer Verzweigung eines Stromes von 1 A messen wir mit diesem Instrument in beiden Zweigen eine Stromstärke von $^1/_4$ A. Das Verzweigungsgesetz besagt in diesem Fall, daß die Summe der Quadratwurzeln der Stromstärken konstant bleibt. Dieses Gesetz ist nach dieser Meßvorschrift natürlich nicht falsch, sondern höchstens unbequem. Die Quadratwurzel würde so oft vorkommen, daß man geneigt

wäre, sie selbst als Stromstärke zu bezeichnen, damit alle Gesetze eine möglichst einfache Gestalt annehmen. Dadurch gelangt man aber wieder zu unserer alten Definition.

2.2. Das magnetische Feld

Bei der Messung einer Stromstärke wurde die Tatsache ausgenutzt, daß zwei Stromkreise aufeinander eine Kraft ausüben. Diese „Fernwirkung" ist folgendermaßen zu erklären: Ein Strom, der in einem Leiter fließt, versetzt den umgebenden Raum in einen besonderen Zustand, der auf einen anderen Stromkreis in diesem Raum unmittelbar einwirkt. Wir sagen, daß ein elektrischer Strom in seiner Umgebung ein magnetisches Feld erzeugt. Dies bedeutet aber, daß eine Kraftwirkung wahrzunehmen ist, sobald in einen beliebigen Punkt seiner Umgebung ein stromdurchflossener Leiter, Eisenspäne oder eine Magnetnadel gebracht werden. Das magnetische Feld, also der besondere Zustand des den Leiter umgebenden Raumes, wird auch als vorhanden angesehen, wenn sich dort keine weiteren Stromkreise, Eisenspäne oder Magnetnadeln befinden.

Die Existenz des magnetischen Feldes erkennen wir durch die Kraftwirkung, und die Stärke des magnetischen Feldes läßt sich am besten aus der Kraftwirkung ermitteln. Es ist nur noch die Frage, welches Gerät dafür gewählt werden soll. Am zweckmäßigsten scheint nachstehende Methode: Es sei ein beliebiger Stromkreis vorhanden, in dem ein beliebiger Strom fließt. Sämtlichen Raumpunkten kommt dann eine bestimmte magnetische Feldstärke zu. Ein

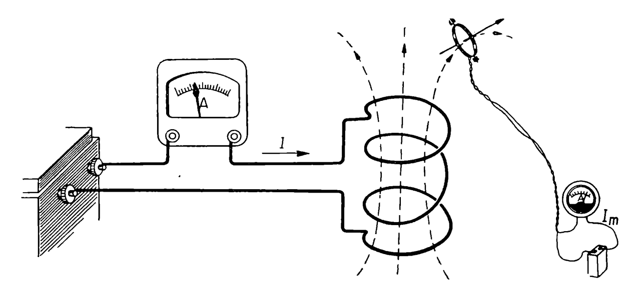


Abb. 17. Messung der Induktion

geschlossener Stromkreis von möglichst kleinen Abmessungen wird unser Meßgerät sein (Abb. 17). Fließt in diesem Meßkreis ein bestimmter Strom und bringen wir ihn an eine bestimmte Stelle des Raumes, so stellt sich die Achse der kleinen Spule in eine bestimmte Richtung ein. Die Richtung der

Achse soll dabei zur Richtung des Stromes im Meßkreis so orientiert sein wie die Bewegungsrichtung einer Rechtsschraube zu ihrer Drehrichtung. Wird die Spule aus ihrer Ruhelage herausgedreht, so beobachtet man ein Rückstellmoment M von bestimmter Größe. Es zeigt sich dabei, daß in einem gegebenen Feld dieses Moment nur von der Spulenfläche und von der Stromstärke in der Spule, nicht aber von der Spulenform abhängt, sofern ihre Abmessungen klein genug sind. Es gilt also

$$M = B \cdot I_m \cdot A, \qquad (2.2.1)$$

wobei I_m die Stromstärke in der Meßspule, A die wirksame Fläche der Spule sind, d. i. bei mehreren Windungen das Produkt von Windungszahl und geometrischer Fläche. Der Einfluß des Stromkreises, durch den das magnetische Feld erzeugt wird, ist im Proportionalitätsfaktor B enthalten. Dieser Faktor könnte zu Recht die in einem bestimmten Punkt der Stromkreisumgebung herrschende magnetische Feldstärke genannt werden. Es folgt nämlich

$$B = \frac{M}{I_m \cdot A}. \qquad (2.2.2)$$

Das bedeutet, daß sich bei konstanter Stromstärke und konstanter Fläche der Meßspule die Größe B in gleichem Maße wie das Moment M ändert. In verschiedenen Punkten des Raumes kann unter Umständen das gleiche Moment wirken, die Richtung der Spule wird sich aber von Punkt zu Punkt ändern. Die Größe B ist also ein Vektor. Aus herkömmlichen Gründen wird B nicht Feldstärke, sondern magnetische Induktion genannt.

Zur Kennzeichnung des magnetischen Feldes wird also definitionsgemäß der Vektor der *magnetischen Induktion* benutzt. Seine Richtung ist die gleiche wie die der Achse des Meßstromkreises. Mißt man das Moment M in Nm, die Stromstärke I_m des Meßstromkreises in A und die wirksame Fläche A der Spule in m^2, so erhält man nach (2.2.2) für die Dimension von B

$$[B] = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{Am}^2} = \frac{\mathrm{VAs}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{1}{\mathrm{Am}} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2},$$

wobei wir uns der eingangs erwähnten, aber noch zu beweisenden Beziehung

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{VAs}}{\mathrm{m}}$$

bedient haben. Die Dimension weist schon darauf hin, daß die Induktion in der Praxis mit Hilfe des Spannungsmessers gemessen wird.[1])

[1]) Einheit der magnetischen Induktion ist nach der „Tafel der gesetzlichen Einheiten" des Deutschen Amtes für Maß und Gewicht neben der Voltsekunde/Quadratmeter auch noch das Weber/Quadratmeter (1 Vs/m^2 = 1 Wb/m^2). (Anm. der dtsch. Red.)

Aus der Definitionsgleichung (2.2.2) und mit Hilfe des nunmehr bekannten Induktionsvektors $\mathfrak{B}$ läßt sich jetzt umgekehrt das Moment berechnen, das auf einen kleinen Stromkreis einwirkt. Die Gleichung (2.2.2) ist nach den vorstehenden Ausführungen aber nur dann erfüllt, wenn die Achse des Stromkreises senkrecht auf der Richtung der Induktion steht. Wenn die Achse und die Induktionslinien parallel sind, ist das Moment Null. Im allgemeinen Fall zählt also nur die Projektion der Induktionsstärke, die auf der Achse des Stromkreises senkrecht steht. Es gilt also ganz allgemein die einfache Beziehung

$$\mathfrak{M} = I_m \cdot \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \tag{2.2.3}$$

nach der man das auf einen beliebigen Stromkreis wirkende Moment als das I_m-fache des vektoriellen Produktes von Flächenvektor und Induktionsvektor erhält. Diese Beziehungen (2.2.1) bis (2.2.3) gelten aber nur unter der Voraussetzung, daß das Feld längs der Fläche A als homogen betrachtet werden kann.

Das Moment M ist unabhängig davon, wie das magnetische Feld zustande gekommen ist: Die Verhältnisse im magnetischen Feld eines Dauermagneten sind die gleichen. Wird also z. B. eine Spule zwischen die Pole eines Hufeisenmagneten gelegt, so wird das auf sie wirkende Moment dem Strom in der Spule verhältnisgleich sein. Diese Anordnung kann ebenfalls zur Messung der Stromstärke benutzt werden (Abb. 18 u. 19).

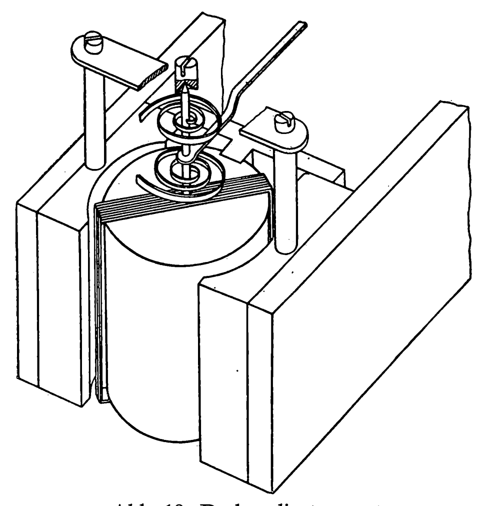




Abb. 18. Drehspulinstrument

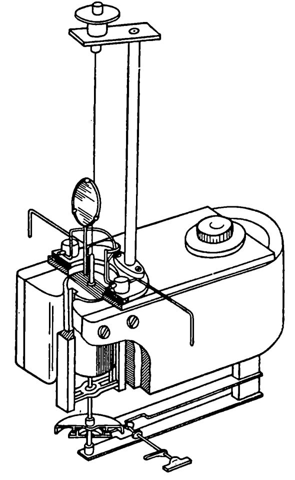


Abb. 19. Spiegelgalvanometer (nach Palm)

Der Abb. 20 kann man entnehmen, welche Induktionsstärken in der Praxis bei verschiedenen Anordnungen auftreten. Für das magnetische Erdfeld ist z. B. $B_E \approx 6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Vs/m^2}$ und in unmittelbarer Umgebung einer Fernleitung

$B_F \approx 10^{-4}\,\mathrm{Vs/m^2}$. Im Luftspalt von Motoren ist $B_M \approx 0{,}8\,\mathrm{Vs/m^2}$, im Eisenkörper von Transformatoren mit sehr großen Leistungen $B_T \approx 1{,}6\,\mathrm{Vs/m^2}$, und in besonderen Forschungseinrichtungen kann für kurze Zeit und unter großem Aufwand eine Induktion $B_{FE} \approx 40\,\mathrm{Vs/m^2}$ erreicht werden.

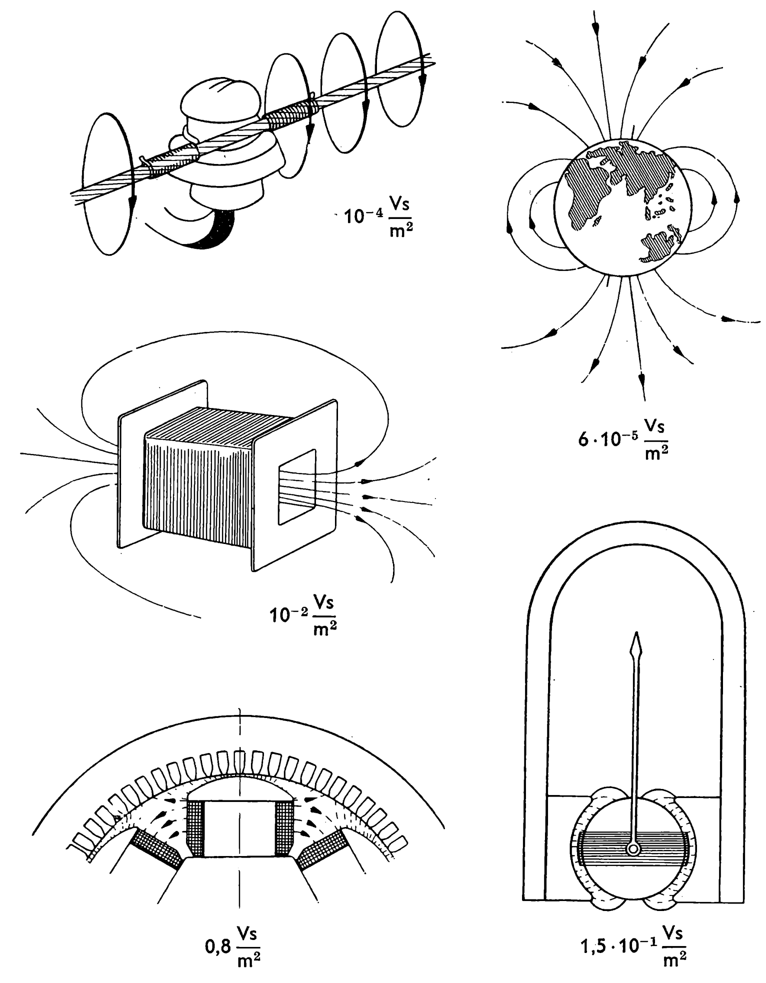


Abb. 20. Induktionswerte

Das magnetische Feld um einen Leiter wird vom elektrischen Strom erzeugt. Deshalb wird zur Messung des magnetischen Feldes auch der Strom verwendet.

Man pflegte früher im allgemeinen das magnetische Feld durch das Feld eines Dauermagneten einzuführen und die magnetische Induktion mit Hilfe der auf die magnetischen „Ladungen“ wirkenden Kraft zu definieren. Diese Einführung des magnetischen Feldes hat den Vorteil der Analogie zur Einführung des elektrischen Feldes, sie kann jedoch leicht den falschen Anschein erwecken, als ob die Begriffe der elektrischen Ladung und der magnetischen „Ladung“ in der Beschreibung der elektromagnetischen Erscheinungen die gleiche Rolle spielen. Später wird sich aber herausstellen, daß magnetische „Ladungen“ analog den elektrischen Ladungen gar nicht existieren. Mit anderen Worten: Die Grunddefinitionen des magnetischen Feldes wurden auf einem falschen physikalischen Fundament errichtet. Bei der Messung des magnetischen Feldes mußten wir auch gegen unsere eigene Zielsetzung verstoßen: Die Induktion B wird in der Praxis meistens nicht in der hier beschriebenen Weise gemessen. Durch unser Verfahren wird aber eine richtige und nützliche, in der Praxis gut verwendbare Beziehung zwischen dem auf eine Spule wirkenden Moment, den Abmessungen der Spule und der Stromstärke in der Spule gewonnen.

Beispiele und Ergänzungen

1. In ein Feld mit der Induktion 1 Vs/m² soll eine Kupferspule mit den Abmessungen 30 × 40 cm hineingebracht und von einem Strom von 500 A durchflossen werden. Wie groß wird das Moment?

$$M = 1 \cdot 500 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 60\,\mathrm{VAs}.$$

Dreht sich diese Spule mit 1500 U/min, so wird die aufzuwendende Leistung

$$P = M\omega = 60 \cdot \frac{1500}{60} \cdot 2\pi \frac{\mathrm{VAs}}{\mathrm{s}} = 9{,}42\,\mathrm{kW}.$$

Momente der genannten Größe treten also in Elektromotoren mittlerer Leistung auf.

2. Erfahrungsgemäß hängt das Moment, wie bereits erwähnt, nicht von der Form der Meßspule ab, sofern sie ein ebener Stromkreis mit kleinen Abmessungen ist. Ist die Spule ein Viereck (Abb. 21), so kann man sich das Moment in der Weise entstanden denken, daß das magnetische Feld auf das Stromelement $I_m \cdot dl_1$ mit einer auf $\mathfrak{B}$ und $d\mathfrak{l}_1$ senkrecht stehenden Kraft $B \cdot I_m \cdot dl_1$ wirkt. In diesem Fall erhält man für das Moment wieder

$$M = BI_m\, dl_1\, dl_2 = BI_m A.$$

Die Krafteinflüsse sollen später noch eingehend behandelt werden. Wir bemerken aber schon an dieser Stelle, daß auf ein Stromelement $I\, d\mathfrak{l}$ im Felde der Induktion $\mathfrak{B}$ eine Kraft

$$\mathfrak{F} = I\, d\mathfrak{l} \times \mathfrak{B}$$

wirkt.

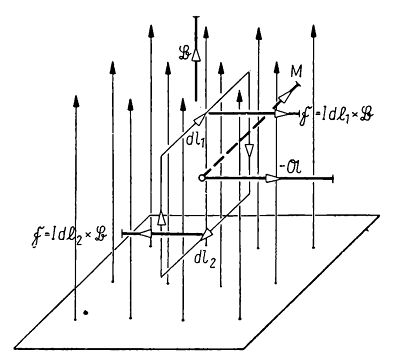


Abb. 21. Kraftwirkung auf ein Leitungselement

2.3. Das BIOT-SAVARTsche Gesetz

Nachdem wir das magnetische Feld mit Hilfe der Induktion gekennzeichnet haben und die Induktionsstärke in jedem Punkt des Raumes *messen* können, soll nun erörtert werden, wie in einem Punkt des Raumes die Induktionsstärke *berechnet* werden kann, wenn die Geometrie eines Stromkreises und die erzeugende Stromstärke gegeben sind.

Die diesbezüglichen experimentellen Ergebnisse, die prinzipiell mit Hilfe der im vorangehenden Abschnitt genannten Meßgeräte zu gewinnen sind, werden im Gesetz von BIOT-SAVART zusammengefaßt. Wir denken unseren geschlossenen Stromkreis in Leiterelemente der Länge dl zerlegt und diese Elemente mit Pfeilen in Stromrichtung versehen, also als vektorielle Stromelemente (Abb. 22). Die Induktion in einem beliebigen Punkt P des Raumes

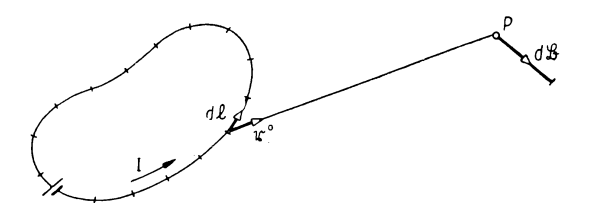


Abb. 22. BIOT-SAVARTsches Gesetz

denken wir uns dann als die Resultierende aller im Punkt P von sämtlichen Stromelementen erzeugten Induktionen. Nach dem BIOT-SAVARTschen Gesetz ist die von einem Stromelement erzeugte magnetische Induktion dem Sinus des Winkels φ zwischen dem Stromelement und dem Fahrstrahl zum Punkt P proportional und dem Quadrat des Abstandes r zwischen dem Stromelement und dem Punkt P umgekehrt proportional. Die Richtung der Induktion steht sowohl auf dem Stromelement als auch auf dem Fahrstrahl senkrecht, wobei $I \cdot d\mathfrak{l}$, $\mathfrak{r}^0$ und $\mathfrak{B}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden (Abb. 23). Es gilt also

$$dB = k \frac{I \cdot dl}{r^2} \sin \varphi$$

oder in vektorieller Form

$$d\mathfrak{B} = k \frac{I\, d\mathfrak{l} \times \mathfrak{r}^0}{r^2}.$$

Abb. 23. Elementarer Induktionsvektor

Die Proportionalitätskonstante k und die Bestimmung ihres Wertes sollen später besprochen werden.

Die gesamte Induktionsstärke im Punkt P wird bestimmt, indem man die durch die einzelnen Stromelemente erzeugten Induktionselemente summiert. Dabei ist zu beachten, daß jedes einzelne Induktionselement eine vektorielle Größe ist und daß daher vektoriell addiert werden muß. Somit gilt für die Induktion im Punkt P

$$\mathfrak{B} = k \oint \frac{I\, d\mathfrak{l} \times \mathfrak{r}^0}{r^2},$$

wobei die Integration über den geschlossenen Stromkreis zu erstrecken ist.

Man pflegt die Konstante k in der Form $\mu_0/4\pi$ zu schreiben. Es ist natürlich ohne Belang, ob man 4π in die Konstante mit einbezieht oder aber gesondert schreibt. Die Schreibweise $\mu_0/4\pi$ hat den Vorteil, daß in künftigen wichtigen Beziehungen der Faktor 4π nicht mehr explizit, das Bild der Formel störend, auftritt. Damit lautet die Differentialform des BIOT-SAVARTschen Gesetzes

$$d\mathfrak{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, d\mathfrak{l} \times \mathfrak{r}^0}{r^2}. \tag{2.3.1}$$

Weder über die Dimension noch über den Zahlenwert von μ_0 kann noch frei verfügt werden; mit der Wahl der Einheiten von I, B und r wurde über μ_0 schon entschieden. Prinzipiell kann μ_0 aus (2.3.1) berechnet werden, wenn man bei bestimmten Werten von I, dl, r die Größe dB mißt. Wir wollen aber

den Zahlenwert von μ_0 in der Weise messen, daß man deutlich seine Abhängigkeit von der Wahl der Stromstärkeeinheit erkennt. Das Ergebnis dieser Messung, die im nächsten Abschnitt behandelt werden soll, ist

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}.$$

μ_0 wird *magnetische Permeabilität des Vakuums* genannt.

Bisher wurden sämtliche Messungen in Luft vorgenommen. Man erhielte also strenggenommen aus den Messungen die Permeabilität der Luft, die aber erfahrungsgemäß mit einer für praktisch-technische Bedürfnisse hinreichenden Genauigkeit mit der Permeabilität des Vakuums übereinstimmt.

Mit dieser Schreibweise gilt jetzt für die in einem beliebigen Punkt des Raumes von einem beliebigen geschlossenen Stromkreis erzeugte magnetische Induktion

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathfrak{l} \times \mathfrak{r}^0}{r^2}$$

(Integralform des BIOT-SAVARTschen Gesetzes).

Dividiert man durch μ_0, so erhält man

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mu_0} = \mathfrak{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\mathfrak{l} \times \mathfrak{r}^0}{r^2}. \tag{2.3.2}$$

Die auf der linken Seite der Gleichung stehende Größe $\mathfrak{B}/\mu_0 = \mathfrak{H}$ wird definitionsgemäß als eine zweite „Feldgröße" des magnetischen Feldes neben der Induktion betrachtet und, ebenfalls aus geschichtlichen Gründen, *magnetische Feldstärke* genannt.

Aus der Definitionsgleichung (2.3.2) ergibt sich die Dimension der magnetischen Feldstärke:

$$[H] = \frac{[I] \cdot [dl]}{[r^2]} = \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Es taucht natürlich die Frage auf, weshalb diese zweite Feldgröße notwendig ist. Eines ist sicher: Wird das magnetische Feld durch den Induktionsvektor $\mathfrak{B}$ gekennzeichnet, so wird es durch jede diesem verhältnisgleiche Größe genauso gekennzeichnet. Solange nur die Erscheinungen im Vakuum untersucht werden (die Luft kann man in dieser Hinsicht praktisch auch als Vakuum betrachten), bringt die Einführung von $\mathfrak{H}$ tatsächlich nur einen sehr geringen formalen Vorteil. Bei der Behandlung des allgemeinen magnetischen Feldes erhalten aber der Induktionsvektor $\mathfrak{B}$ und der Feldstärkevektor $\mathfrak{H}$ jeder für sich eine besondere Bedeutung.

Beispiele und Ergänzungen

1. Das magnetische Feld kann durch „Feldlinien“, das sind Linien, deren Tangente in jedem Punkt mit der Richtung des Feldvektors zusammenfällt und deren Dichte gleich dem Betrag des Feldvektors ist, anschaulich dargestellt werden (Abb. 24a):

Die Feldlinien eines Stromelementes sind konzentrische Kreise um die Achse des Stromelementes. Entlang eines jeden vom Stromelement gezogenen Strahles nimmt die Feldliniendichte wie die Feldstärke nach dem $1/r^2$-Gesetz ab (Abb. 24b).

In Richtung des Stromelementes existiert wegen des sin-Gliedes keine Feldstärke.

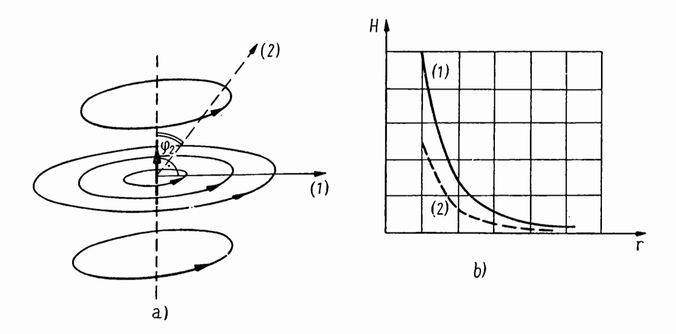


Abb. 24. Feld eines linearen Stromelements

2. Wir können natürlich nur die von einem geschlossenen Stromkreis herrührende Feldstärke messen. Das Feldlinienbild eines einzelnen Stromelementes hat zunächst keine Realität. Dies gilt, solange wir es mit einem von einem Gleichstrom verursachten Feld zu tun haben. Später werden wir das Feld eines schwingenden Dipols behandeln; es wird sich herausstellen, daß in erster Näherung das jetzt bestimmte Feld tatsächlich entstehen kann.

3. Aus dem Biot-Savartschen Gesetz in Integralform kann man nicht eindeutig auf die Differentialform schließen. Tatsächlich wurde zuerst eine ganz andere Form als richtig angenommen, die freilich integriert die richtige Gleichung ergibt.

2.4. Die Berechnung des magnetischen Feldes mit Hilfe des BIOT-SAVARTschen Gesetzes für einige Spezialfälle

2.4.1. *Das Feld eines unendlich langen geraden Leiters*

Es sei ein unendlich langer gerader Leiter gegeben (Abb. 25). Der Wert der Stromstärke sei I. Es soll die magnetische Feldstärke in einem Punkt P im Abstand R vom Leiter berechnet werden. Ist $I\,dl$ ein beliebiges Stromelement, dann ist die von ihm im Punkt P erzeugte differentielle Feldstärke

$$dH = \frac{I}{4\pi}\frac{dl \sin\varphi}{r^2}.$$

Abb. 25. Feld eines unendlich langen geraden Leiters

Die resultierende magnetische Feldstärke erhält man dann durch Addition der durch die einzelnen Stromelemente erzeugten magnetischen Feldstärkeelemente. Die Addition ist im allgemeinen vektoriell auszuführen, reduziert sich aber hier zu einer skalaren Operation, weil alle Feldstärkeelemente die gleiche Richtung besitzen, und zwar stehen sie sowohl auf dem Leiter als auch auf den von beliebigen Punkten des Leiters nach P gehenden Strahlen senkrecht, d. h., sie stehen auf der durch den Leiter und den Punkt P gelegten Ebene senkrecht. Daher beträgt der Wert der magnetischen Feldstärke

$$H = \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dl \sin\varphi}{r^2}.$$

Die Integration erstreckt sich über den ganzen Leiter, ist also von $l = -\infty$ bis $l = +\infty$ vorzunehmen. Mit den aus Abb. 25 hervorgehenden Beziehungen

$$dl \sin\varphi = r\, d\alpha; \quad r = \frac{R}{\cos\alpha}$$

folgt

$$H = \frac{I}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{r\, d\alpha}{r^2} = \frac{I}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{R} = \frac{I}{4\pi}\frac{1}{R}\,[\sin\alpha]_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$

oder

$$H = \frac{I}{2\pi R}. \tag{2.4.1}$$

Die Integrationsgrenzen $\alpha = -\pi/2$ und $\alpha = +\pi/2$ entsprechen den unendlich entfernten Leiterstücken in den beiden Richtungen.

Die magnetische Feldstärke nimmt hyperbolisch mit wachsender Entfernung R vom Leiter ab. Sie steht überall auf der Ebene, die durch den Leiter und den Punkt P hindurchgeht, senkrecht.

In Abb. 25a ist das Feldlinienbild eines unendlich langen geraden Leiters gezeichnet. Nach (2.4.1) würde mit $R \to 0$ am Ort des Leiters selbst die Feldstärke unendlich groß werden. Dies ist natürlich nicht richtig, da keine unendlich dünne Leitung existiert, die einen endlichen Strom leiten könnte. Im Innern einer Leitung von endlicher Dicke gilt also die Beziehung (2.4.1) nicht.

Beispiele und Ergänzungen

1. Die Abb. 26 veranschaulicht, welche magnetischen Feldstärken im Vergleich zum Erdfeld ($H = 60$ A/m) in der Umgebung von Leitungen mit verschiedenen Strömen bestehen. Danach sind selbst in der Umgebung von Leitungen, in denen Ströme fließen, wie sie in der Praxis nur selten vorkommen,

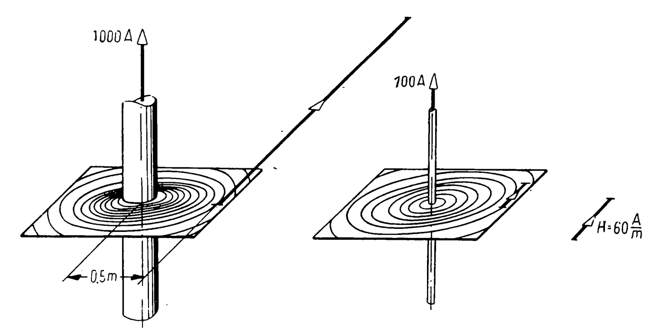


Abb. 26. Feldstärken in der Umgebung von Leitungen im Vergleich zum Erdfeld. Die links eingezeichnete größere Feldstärke hat den Wert 318 A/m, die rechts eingezeichnete kleinere den Wert 31,8 A/m

keine übermäßig großen Feldstärken festzustellen. Dies ist von großer Bedeutung für den Betrieb zahlreicher Meßgeräte, die durch magnetische Felder erheblich gestört werden können. In Normvorschriften wird aber gefordert, daß diese Geräte selbst bei einer Feldstärke von 396 A/m (= 5 Oersted)[1]) noch verläßlich anzeigen sollen.

2. Der Begriff des unendlich langen Leiters ist naturgemäß eine mathematische Abstraktion. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, daß zur Induktion in einem Punkt des Raumes, der vom Leiter nicht zu weit entfernt ist, im wesentlichen nur die Stromelemente des Leiters beitragen, die dem Punkt nahe liegen: Betrachten wir hierzu einen geraden Leiter der Länge $2l$ (Abb. 27).

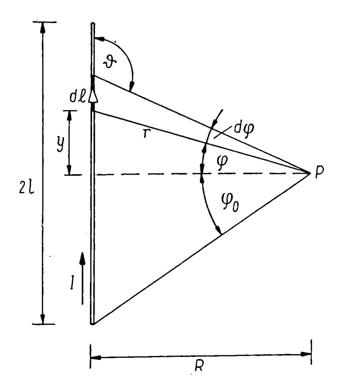


Abb. 27. Bestimmung des Feldes eines endlich langen geraden Leiters

Die magnetische Feldstärke in der Symmetrieebene im Abstand R vom Leiter besitzt nur eine Komponente H_0, die auf der Zeichenebene senkrecht steht. Mit den Bezeichnungen in Abb. 27 kann dann auf Grund des BIOT-SAVARTschen Gesetzes geschrieben werden

$$H_0 = \frac{I}{4\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \, dl.$$

Da $dl = dy$, $\sin \vartheta \, dy = r \cdot d\varphi$ und $r = \dfrac{R}{\cos \varphi}$ ist, folgt

$$H_0 = \frac{I}{2\pi} \int_0^{\varphi_0} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{R} = \frac{I}{2\pi R} \sin \varphi_0 = \frac{I}{2\pi R} \frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}}$$

$$= \frac{I}{2\pi R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}}.$$

[1]) Die Einheit Oersted (Oe) ist nach der „Tafel der gesetzlichen Einheiten“ des Deutschen Amtes für Maß und Gewicht nicht mehr gesetzliche Einheit für die magnetische Feldstärke. Die in der älteren Literatur noch vorkommende Einheit Oersted entspricht 79,58 A/m.

Für $l \to \infty$ geht $\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2} \to 1$ und $H_0 \to H_\infty = \frac{I}{2\pi R}$, wie es für den unendlich langen Leiter auch unmittelbar berechnet wurde. Das Ergebnis kann aber in dieser Form nicht verwendet werden, weil von physikalisch unrealen Bedingungen ausgegangen wurde: Ein Strom kann nämlich nur in einem geschlossenen Kreis fließen. Das Ergebnis der formalen Rechnung zeigt aber, daß der Fehler, den man macht, wenn man bei der Berechnung der magnetischen Feldstärke in der Nähe eines endlichen geraden Leiters diesen als unendlich lang ansieht, um so kleiner ist, je kleiner das Verhältnis R/l ist. In Abb. 28 ist die Funktion $\frac{H_0}{H_\infty} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2}}$ über $\frac{R}{l}$ aufgetragen. Man erhält demnach ein genügend genaues Ergebnis mit Hilfe der Gleichung (2.4.1) für den unendlich langen Leiter, wenn man dafür sorgt, daß das Verhältnis R/l stets kleiner als 0,1 ist.

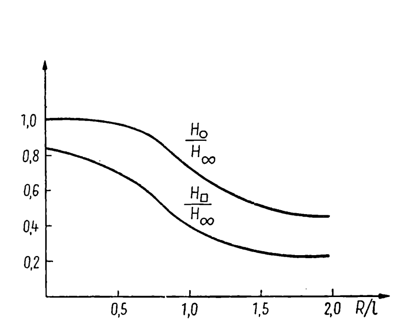


Abb. 28. Vergleich der magnetischen Felder eines endlichen bzw. eines unendlich langen Leiters

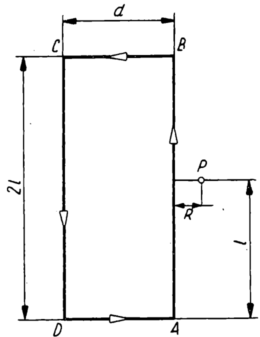


Abb. 29. Endliche Leiter mit Rückleitung

Weiterhin können wir mit Hilfe des Ergebnisses unserer formalen Rechnung das magnetische Feld eines Stromkreises mit Rückleitung bestimmen (Abb. 29). Die Entfernung der Rückleitung soll d betragen. Das Feld im Punkt P läßt sich mit Hilfe des Überlagerungsprinzips berechnen.

Die vom Strom in den Abschnitten AB und CD im Punkt P erzeugten Feldstärken sind gemäß den vorherigen Überlegungen

$$H_{AB} = \frac{I}{2\pi R}\frac{1}{\sqrt{1+(R/l)^2}}; \quad H_{CD} = -\frac{I}{2\pi (d+R)}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{d+R}{l}\right)^2}}.$$

Analog ergeben sich die von den Stromabschnitten BC und AD erzeugten Feldstärken im Punkt P nach Abb. 30 zu

$$H_{BC} = H_{AD} = -\frac{I}{4\pi l}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos\alpha \, d\alpha = -\frac{I}{4\pi l}[\sin\alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$= -\frac{I}{4\pi l}\left(\frac{d+R}{\sqrt{l^2+(d+R)^2}} - \frac{R}{\sqrt{l^2+R^2}}\right)$$

$$= -\frac{I}{4\pi l}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{l}{d+R}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{l}{R}\right)^2}}\right).$$

Abb. 30. Zur Berechnung der Feldstärke eines endlichen Leiters mit Rückleitung

Die resultierende Feldstärke im Punkt P wird somit

$$H_{\square} = H_{AB} + H_{CD} + 2H_{BC}$$

$$= \frac{I}{2\pi R}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2}} - \frac{R}{d+R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{d+R}{l}\right)^2}} + \frac{R}{l}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{l}{R}\right)^2}} - \frac{R}{l}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{l}{d+R}\right)^2}}\right].$$

Diese Gleichung besagt folgendes: Für $l \approx d \gg R$ erhalten wir die einfache Beziehung $H_{\square} \approx H_{\infty} = I/2\pi R$. Wenn $R \to 0$ geht, l und d aber endlich bleiben, so haben wir wieder $H_{\square} \approx H_{\infty} = I/2\pi R$. Geht mit R auch d gegen 0, z. B. $d = 5R$, so wird $H_{\square}/H_{\infty} \to 5/6$.

Das Verhältnis $H_{\square}/H_{\infty}$ ist für $d = 5R$ als Funktion von R/l in Abb. 28 eingezeichnet.

4. Der Zahlenwert der Konstanten μ_0 kann jetzt bestimmt werden. Der Wert der magnetischen Induktion im senkrechten Abstand R vom unendlich langen geraden Leiter ist

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I}{2\pi R}.$$

Wird parallel zu diesem Leiter im Abstand R ein zweiter Leiter ausgespannt, so wirkt auf einen Abschnitt der Länge l dieses Leiters eine Kraft, deren Größe durch

$$F = B \cdot I \cdot l$$

gegeben ist, falls im zweiten Leiter der gleiche Strom I fließt. Setzt man den Wert von B ein, so wird

$$F = \mu_0 \frac{I^2 l}{2\pi R}.$$

Von der Definition der Stromstärkeeinheit her ist uns bekannt, daß $F = 2 \cdot 10^{-7}$ N ist, wenn $I = 1$ A und $l = R = 1$ m sind. Setzt man diese Werte in die letzte Gleichung ein und löst nach μ_0 auf, dann erhält man

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$$

oder mit der Beziehung Nm/s = VA

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}.$$

Wie bereits erwähnt, wurde der Wert von μ_0 mit der Wahl der Stromstärkeeinheit entschieden. Man kann auch umgekehrt vorgehen, indem man μ_0 zu $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$ wählt und dann darauf das System der elektrischen Einheiten aufbaut. Bei diesem Verfahren wäre, wie auch aus der Dimension von μ_0 hervorgeht, das Verhältnis $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$, also die Einheit des Widerstandes, die elektrische Grundeinheit.

2.4.2. *Das Feld zweier paralleler unendlich langer gerader Leiter*

Bei der Berechnung des magnetischen Feldes *eines* geraden Leiters wurde vorausgesetzt, daß die Rückleitung des Stromes irgendwo in großer Entfernung erfolgt. Es soll nun untersucht werden, wie sich die Verhältnisse

gestalten, wenn die Rückleitung über eine unendlich lange Leitung erfolgt, die parallel zur Hinleitung im Abstand d gespannt ist. Die magnetische Feldstärke in einem beliebigen Raumpunkt wird nach dem Überlagerungsprinzip berechnet, indem die von jeweils einem Leiter erzeugten Felder vektoriell addiert werden.

Die Berechtigung, die Felder zweier Leiter unabhängig voneinander zu berechnen und das resultierende Feld durch ihre vektorielle Addition zu bestimmen, ist auf Grund experimenteller Untersuchungen gegeben und drückt sich theoretisch in der Linearität der Grundgleichungen aus. Es gibt auch Felder, bei denen das Überlagerungsprinzip nicht gültig ist, wie z. B. das magnetische Feld in ferromagnetischen Stoffen.

Wir untersuchen die magnetische Feldstärke in einem Punkt, der in der gemeinsamen Ebene beider Leitungen *zwischen* diesen liegt. Aus der Abb. 31

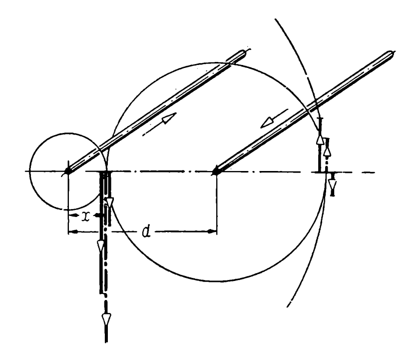


Abb. 31. Magnetisches Feld paralleler Leiter

erkennt man, daß durch beide Ströme gleichgerichtete Feldstärken erzeugt werden. Sie können deshalb algebraisch summiert werden. Der Wert der magnetischen Feldstärke zwischen den beiden Leitern ist daher

$$H = \frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi (d - x)}.$$

Außerhalb der Doppelleitung in der gleichen Ebene ergibt sich die magnetische Feldstärke aus der Differenz der von beiden Leitern erzeugten Feldstärken. Die letzte Beziehung gilt also auch dort, wenn für x das entsprechende Vorzeichen eingesetzt wird. Die entsprechenden Funktionen und ihre Überlagerungen sind in Abb. 32 dargestellt. Es ist selbstverständlich, daß diese Gleichungen das magnetische Feld nur bis zur Oberfläche der Leitungen richtig beschreiben.

Beispiele und Ergänzungen

1. Es soll der Verlauf der magnetischen Feldstärke zweier paralleler Leiter, die von entgegengesetzt gerichteten Strömen durchflossen werden, in großer Entfernung in der gemeinsamen Ebene dieser Leiter untersucht werden.

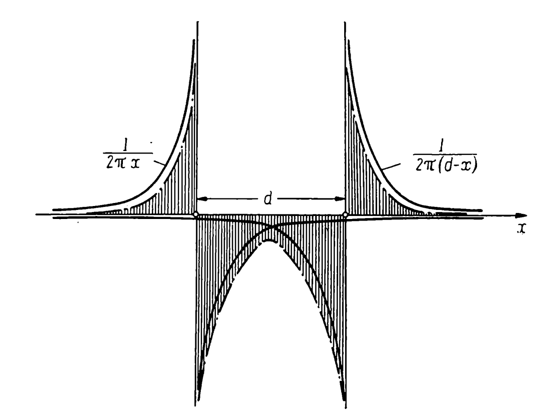


Abb. 32. Magnetisches Feld zweier paralleler Leiter mit entgegengesetzter Stromrichtung

Für $x \gg d$ wird

$$H = \frac{I}{2\pi x} - \frac{I}{2\pi(x-d)} = -\frac{I}{2\pi}\frac{d}{x(x-d)} \approx -\frac{Id}{2\pi x^2}.$$

Die magnetische Feldstärke nimmt mit dem Quadrat des Abstandes ab, also stärker als bei der Einzelleitung, wo die Abnahme proportional zur ersten Potenz des Abstandes erfolgt. Das negative Vorzeichen weist darauf hin, daß die Richtung der Feldstärke der Richtung der Feldstärke im Gebiet zwischen den Leitern entgegengesetzt ist.

2. Die magnetischen Feldlinien der Doppelleitung sind Kreise, die in einer zu beiden Leitungen senkrechten Ebene liegen und deren Mittelpunkte sich auf der durch die Leitungen hindurchgehenden Geraden befinden. Der Beweis wird in Abschnitt 3.11.4. gegeben.

2.4.3. *Das magnetische Feld eines kreisförmigen Leiters*

Das mit dem Strom verkettete magnetische Feld wird häufig als bloße Begleiterscheinung des Stromes angesehen, für dessen Größe man sich nur überschlägig interessiert. Als Beispiel dafür seien die Störwirkungen von Fernleitungen auf Meßgeräte oder andere Schwachstromfernleitungen oder der durch dieses magnetische Feld verursachte Spannungsabfall genannt. Andererseits will man oft mit Hilfe des Stromes ein sehr großes magnetisches Feld

erzeugen. Dann wird man natürlich sämtliche Leitungselemente möglichst nahe an den Punkt heranbringen, an dem die gewünschte große Feldstärke erzeugt werden soll. Die günstigste Anordnung hierfür ist ein kreisförmiger Leiter.

Es soll zunächst die magnetische Feldstärke im Mittelpunkt eines Kreisleiters vom Radius R bestimmt werden. Der Feldstärkevektor hat die Richtung

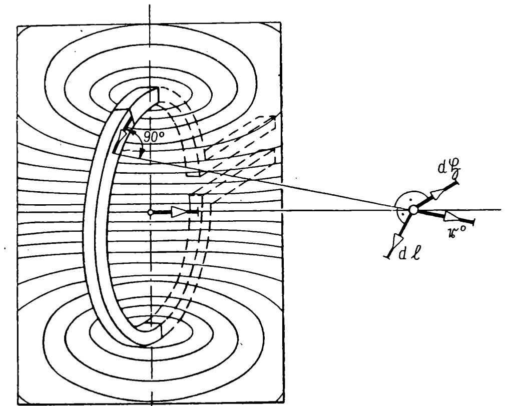


Abb. 33. Magnetisches Feld eines kreisförmigen Leiters

der Achse des Leiterringes, weil sämtliche durch die einzelnen Stromelemente erzeugten Feldstärken in diese Richtung weisen (Abb. 33). Die Summation läßt sich daher skalar durchführen. Die von einem beliebigen Stromelement hervorgerufene Feldstärke ist

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{dl \sin \varphi}{R^2}.$$

Da der Winkel zwischen einem Leitungselement und dem zum Aufpunkt (Kreismittelpunkt) gefällten Strahl überall $\varphi = 90°$ beträgt, außerdem der Abstand zwischen Aufpunkt und allen Leitungselementen gleich, und zwar gleich dem Halbmesser des Kreises ist, wird

$$H = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{dl \sin \varphi}{R^2} = \frac{I}{4\pi} \frac{1}{R^2} \oint dl.$$

Das Integral über alle Leitungselemente ist gleich dem Kreisumfang. Damit ist die magnetische Feldstärke im Mittelpunkt eines Kreisleiters

$$H = \frac{I}{4\pi} \frac{1}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{I}{2R}.$$

Um wieviel wirksamer diese Anordnung gegenüber einem geraden Leiter bei der Erzeugung eines magnetischen Feldes ist, wird deutlich, wenn man dieses Ergebnis mit dem magnetischen Feld im Abstand R von einem geraden unendlich langen Leiter vergleicht: Im Mittelpunkt eines Kreisleiters von der Länge $2\pi R$ ist bei gleicher Stromstärke die magnetische Feldstärke π-mal so groß.

Für beliebige andere Punkte auf der Achse des Kreisleiters ist die Berechnung der magnetischen Feldstärke nur wenig schwerer. Die durch die einzelnen Stromelemente erzeugten magnetischen Feldstärkeelemente sind verschieden gerichtet. Bewegt man sich längs des Kreisumfanges, so beschreiben die Vektoren des magnetischen Feldstärkeelementes auf einem Punkt der Achse eine Kegelfläche (Abb. 34). Der halbe Öffnungswinkel dieses Kegels beträgt

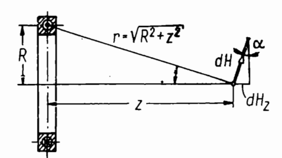


Abb. 34. Berechnung des magnetischen Feldes eines Kreisleiters

$90° - \alpha$, wobei $\alpha = \operatorname{arc\,tan} R/z$ ist. Die auf der Achse senkrecht stehenden Komponenten heben sich gegenseitig auf, da ihre Werte, die zu gegenüberliegenden Stromkreiselementen gehören, gleichgroß und entgegengesetzt gerichtet sind. Damit kommen lediglich die in Achsrichtung fallenden Komponenten zur Geltung. Da diese jedoch alle gleichgerichtet sind, können sie skalar summiert werden. Somit ist die Stärke des magnetischen Feldes auf einem Punkt $(z, 0, 0)$ der Achse

$$H = \oint dH \cos(90° - \alpha) = \frac{I}{4\pi}\oint \frac{dl}{r^2}\cos(90° - \alpha).$$

Da $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha = \frac{R}{r}$ und r und R für alle Bogenelemente gleichgroß sind, wird

$$H = \frac{I}{4\pi}\frac{R}{r^3}\oint dl = \frac{IR^2}{2r^3}.$$

Verwendet man noch die geometrische Beziehung $r = \sqrt{R^2 - z^2}$, so erhält man die magnetische Feldstärke in einem beliebigen Punkt P auf der Achse des Kreisleiters:

$$H = \frac{I}{2}\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{2.4.2}$$

Der Verlauf der Feldstärke längs der Achse ist aus Abb. 35 ersichtlich.

Häufig muß man den Verlauf der magnetischen Feldstärke längs der Achse des Kreisleiters bis zu einem unendlich weit entfernten Punkt verfolgen. Da

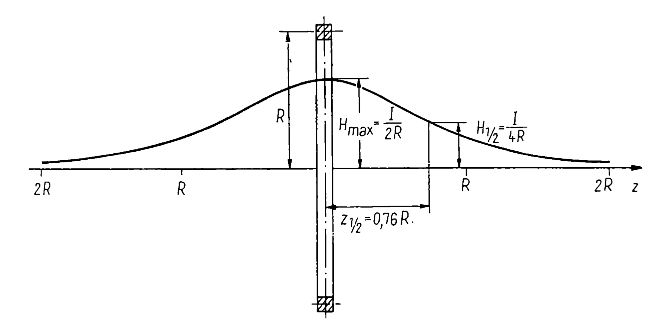


Abb. 35. Verlauf des magnetischen Feldes entlang der Achse des kreisförmigen Leiters

für $z \to \infty$

$$R^2 + z^2 = z^2\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \approx z^2$$

gilt, wird in diesem Fall die Feldstärke

$$H \approx \frac{IR^2}{2}\frac{1}{z^3}.$$

Die magnetische Feldstärke eines Kreisleiters nimmt in großer Entfernung mit der dritten Potenz des Abstandes ab.

Beispiele und Ergänzungen

1. Die Gleichung, die für die magnetische Feldstärke in einem vom kreisförmigen Leiter weit entfernten Punkt abgeleitet wurde, kann in folgender, sich später als sehr wichtig erweisender Form geschrieben werden:

$$H = \frac{IR^2}{2}\frac{1}{z^3} = \frac{IR^2\pi}{2\pi}\frac{1}{z^3} = \frac{1}{2\pi}A \cdot I \cdot \frac{1}{z^3}. \qquad (2.4.3)$$

Danach hängt die Feldstärke vom Produkt aus der Fläche des Leiterringes und der Stromstärke ab. Mit Hilfe des Gesetzes von BIOT-SAVART kann auch bewiesen werden, daß dies ganz allgemein gilt: Das magnetische Feld eines ebenen Stromkreises von *beliebiger* Form wird längs einer auf dem Stromkreis

senkrecht stehenden Geraden in einem weit entfernten Punkt mit Hilfe der Gleichung (2.4.3) berechnet.

Es lohnt sich dabei noch zu erwähnen, daß $\frac{1}{2\pi} AI \frac{1}{z^3}$ die negative Ableitung von $\frac{1}{4\pi} AI \frac{1}{z^2}$ ist. Es ist also auch

$$H = -\frac{I}{4\pi} \frac{d}{dz} \frac{A}{z^2}.$$

$\frac{A}{z^2}$ ist gerade der Raumwinkel, unter dem der Stromkreis vom Aufpunkt aus erscheint.

2. Unsere bisherigen Beziehungen wurden ordnungsgemäß hergeleitet. Nun wollen wir uns aber ohne Beweisführung darauf berufen, daß unser jüngstes Ergebnis in nachstehendem Absatz ganz allgemein gilt.

Den Vektor der magnetischen Feldstärke erhält man in einem beliebigen Punkt der Umgebung eines beliebigen Stromkreises, wenn man den Gradienten des Raumwinkels, unter dem der Stromkreis von dem in Frage stehenden Punkt erscheint, mit $-\frac{I}{4\pi}$ multipliziert:

$$\mathfrak{H} = -\frac{I}{4\pi} \operatorname{grad} \Omega. \tag{2.4.4}$$

Diese Gleichung besagt mit anderen Worten, daß durch den Raumwinkel das Potential des magnetischen Feldes geliefert wird (Abb. 36).

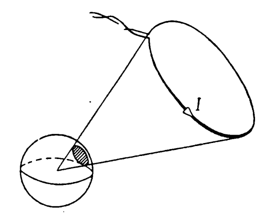


Abb. 36. Berechnung des Raumwinkels eines stromführenden Leiters

3. Um zu zeigen, wie gut sich die Gleichung (2.4.4) zur Berechnung des magnetischen Feldes eignet, soll noch einmal das Feld des geraden Leiters berechnet werden. In diesem Beispiel ist nicht auf den ersten Blick einzusehen, um welchen Raumwinkel es sich handelt. Wir denken uns einen aus zwei Parallelleitungen bestehenden geschlossenen Stromkreis, dessen Rückleitung ins Unendliche verschoben wurde (Abb. 37). Dann umschließt der Strom-

kreis eine Halbebene. Einen beliebigen Punkt P im Raum, in dem das magnetische Feld berechnet werden soll, umgeben wir mit der Einheitskugel und verbinden sämtliche Punkte unserer Leitung mit P. Durch diese Strahlen wird aus der Einheitskugel ein Halbkreis herausgeschnitten. Die Strahlen,

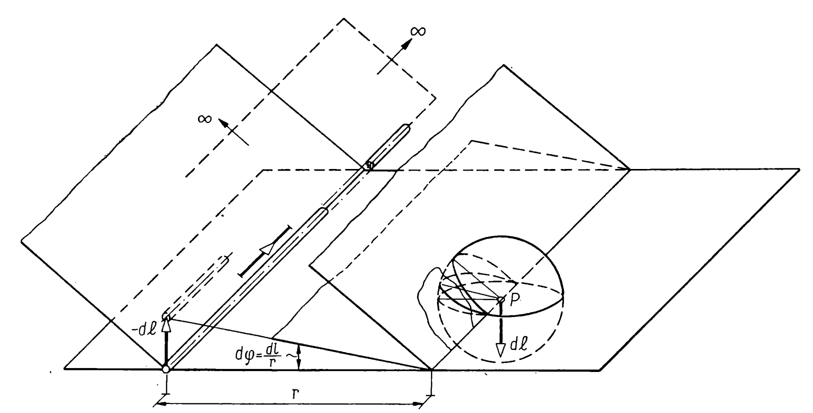


Abb. 37. Berechnung des Raumwinkels eines unendlich langen geraden Leiters

die zu der unendlich entfernten Rückleitung gezogen werden, schneiden einen anderen Halbkreis heraus. Die von beiden eingeschlossene Fläche ist der gesuchte Raumwinkel. Seine Größe hängt also davon ab, in welcher Richtung man die Rückleitung gelegen denkt. Dies ist aber nicht wesentlich, da uns nur die Änderung des Raumwinkels interessiert. Rückt man nämlich mit P längs der Kraftlinie um das Stück dl weiter, so ändert sich der Raumwinkel um genausoviel, als ob man den Leiter um $-dl$ fortbewegt hätte. Die Änderung des Raumwinkels ist bei Änderung der eingeschlossenen Fläche durch die Winkeländerung $d\varphi = \dfrac{dl}{r}$

$$d\Omega = 2\,d\varphi = 2\,\frac{dl}{r},$$

wie nach Abb. 38 zu sehen ist. Es ist nämlich das Flächenelement auf der Einheitskugel

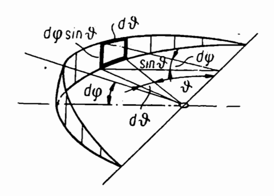
$$d^2A = 1 \cdot d\varphi \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

und damit wird

$$dA = d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta = d\varphi[-\cos\vartheta]_0^\pi = 2\,d\varphi.$$

Folglich wird die magnetische Feldstärke

$$H = \frac{I}{4\pi} \cdot 2\,\frac{dl}{r} \cdot \frac{1}{dl} = \frac{I}{2\pi\, r}.$$



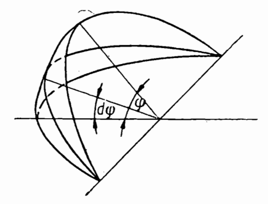


Abb. 38. Raumwinkel auf der Einheitskugel

4. Ist der Kreisleiter eine Spule aus n Wicklungen (Abb. 39) und ist der Querschnitt der Spule klein gegen den Radius der Spule, dann ist bei einer Stromstärke I der Wert der magnetischen Feldstärke das n-fache des vorher berechneten Wertes.

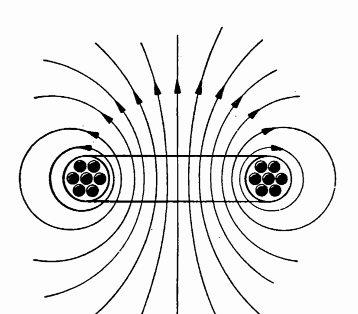


Abb. 39. Feld einer kreisförmigen Spule mit kleinem Querschnitt

2.4.4. *Das magnetische Feld des Solenoids*

Man erhält in einem größeren Volumen ein konzentriertes magnetisches Feld, wenn zwei Kreisleiter in bestimmtem Abstand voneinander angeordnet werden (Abb. 40, 41) und in beiden der gleiche Strom fließt. Die magnetische Feldstärke im Innern der dadurch entstandenen Spule aus 2 Windungen vergrößert sich, weil die magnetischen Felder, die durch die beiden konzentrischen kreisförmigen Leiter erzeugt werden, in der gemeinsamen Achse die gleiche Richtung haben. Gleichzeitig ist aber die magnetische Feldstärke in der äußeren Umgebung der Spule kleiner. In der Abb. 42 ist das Feldlinienbild gezeichnet. Mit Hilfe des Überlagerungsprinzips findet man für die Punkte

auf der Achse

$$H = \frac{IR^2}{2\left[R^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{IR^2}{2\left[R^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Darin ist d der Abstand der beiden Leiterringe. In der Abb. 43 ist H als Funktion von z gezeichnet.

Im Solenoid, einer langen Spule aus sehr vielen Windungen, erhält man eine weitere Verdichtung der Feldlinien (Abb. 44a, b). In der Abb. 44c ist wieder H als Funktion von z gezeichnet.

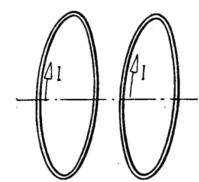


Abb. 40. Zwei nebeneinander angeordnete Kreisleiter

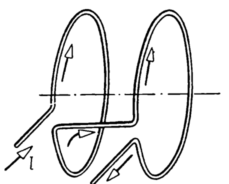


Abb. 41. Einfachstes Solenoid

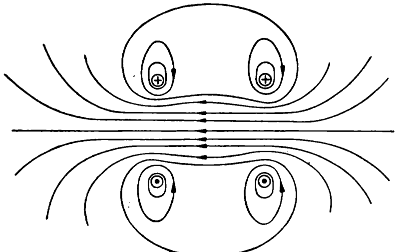


Abb. 42. Magnetisches Feld der Anordnung in Abb. 41

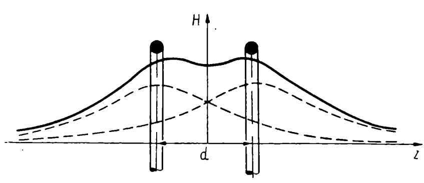


Abb. 43. Verlauf des magnetischen Feldes entlang der Achse der kreisförmigen Leiter in Abb. 41

Eine quantitative Berechnung der magnetischen Feldstärke ist leicht durchzuführen, wenn die einzelnen Windungen dicht beieinander liegen. Es sei $d\xi$ ein Längenelement des Solenoids. Bei n Windungen pro Meter kommen auf das Längenelement $d\xi$ gerade $n \cdot d\xi$ Windungen. Bei einer Stromstärke I kann ein solches herausgeschnittenes Solenoidstück als ein Kreisleiter mit einer Stromstärke $n \cdot d\xi \cdot I$ aufgefaßt werden, der in einem beliebigen Punkt auf der Achse des Solenoids die Feldstärke

$$dH = \frac{n\, d\xi\, IR^2}{2[R^2 + (z - \xi)^2]^{3/2}}$$

erzeugt. Die gesamte Feldstärke in diesem Punkt erhält man wieder durch Integration über alle Elemente $d\xi$ in den Grenzen $\xi = -\dfrac{l}{2}$ und $\xi = +\dfrac{l}{2}$:

$$H(z) = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{nIR^2}{2[R^2 + (z-\xi)^2]^{3/2}}\, d\xi .$$

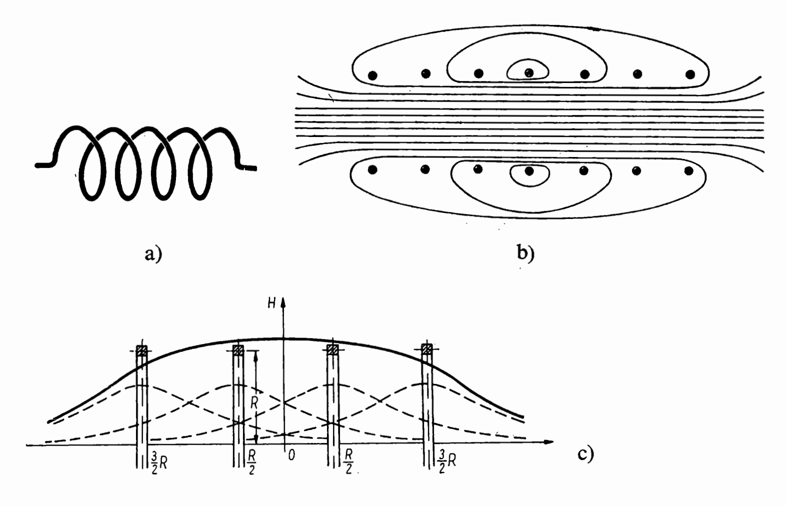


Abb. 44. Solenoid

Mit den Bezeichnungen in Abb. 45 ist

$$\frac{R^2}{R^2 + (z-\xi)^2} = \sin^2\alpha ; \qquad \frac{d\xi}{\sqrt{R^2 + (z-\xi)^2}} = \frac{d\alpha}{\sin\alpha} .$$

Damit wird

$$H(z) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{nI}{2}\sin^2\alpha \frac{d\alpha}{\sin\alpha} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{nI}{2}\sin\alpha\, d\alpha ,$$

$$H(z) = \frac{nI}{2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = \frac{NI}{2l}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) \tag{2.4.5}$$

mit

$$\alpha_1 = \arctan \frac{R}{\dfrac{l}{2} + z} ; \quad \alpha_2 = \pi - \arctan \frac{R}{\dfrac{l}{2} - z} \quad \text{und} \quad n = \frac{N}{l} .$$

In Abb. 46 ist die magnetische Feldstärke in der Spulenachse graphisch dargestellt.

Ist bei einem Solenoid das Verhältnis seiner Länge zum Radius sehr groß, so gilt in Näherung

$$\alpha_1 \approx 0\,; \quad \alpha_2 \approx \pi\,; \quad \cos\alpha_1 \approx 1\,; \quad \cos\alpha_2 \approx -1,$$

und die magnetische Feldstärke ist im Innern des Solenoids überall auf der Achse

$$H \approx \frac{NI}{l}. \tag{2.4.6}$$

Diese Beziehung wird später unter Zuhilfenahme eines anderen Gesetzes auch einfacher berechnet werden.

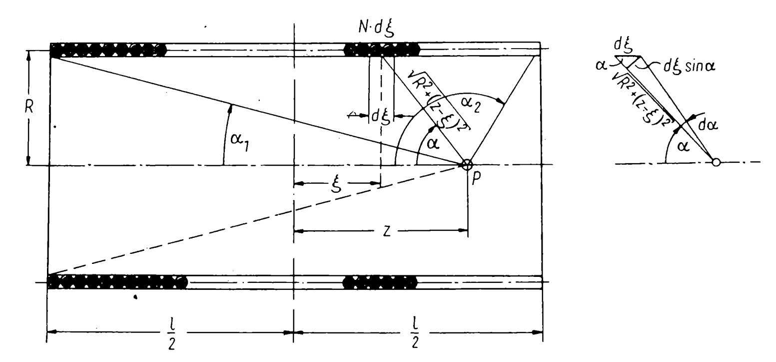


Abb. 45. Berechnung des Feldes eines Solenoids

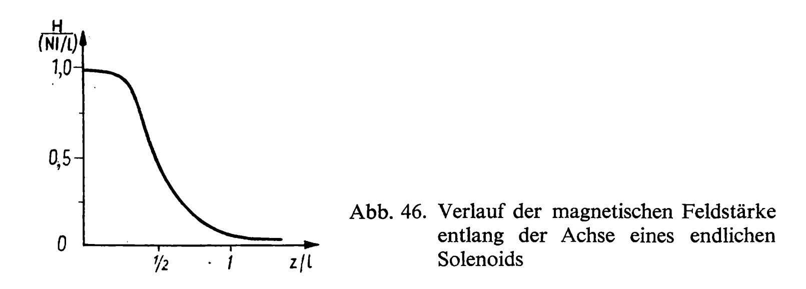


Abb. 46. Verlauf der magnetischen Feldstärke entlang der Achse eines endlichen Solenoids

Beispiele und Ergänzungen

1. In Solenoiden können ziemlich große magnetische Felder erzeugt werden. Hat z. B. eine Spule von 5 cm Durchmesser 1000 Windungen bei einer Länge

von 0,2 m und fließt ein Strom von 5 A, so ist in der Achse annähernd

$$H = \frac{1000 \cdot 5}{0{,}2} \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = 25000 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.$$

Manchmal wird der Dimensionsbezeichnung der magnetischen Feldstärke noch das Wort „Windung" hinzugefügt. Man spricht dann nicht von Ampere pro Meter, sondern von Amperewindungen pro Meter. Das Produkt NI wird auch *Erregung* genannt, weil das Feld mit Hilfe der Spulen erregt wird und das Maß der Erregungsstärke eben das erzeugte magnetische Feld ist.

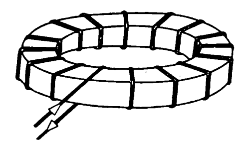


Abb. 47. Toroid

2. Wird eine lange Spule kreisförmig gebogen (Abb. 47), gelangt man zur Kreisringspule (auch Toroid genannt). In diesem Fall können die sogenannten Streufeldlinien, die vom Ende des langen Solenoids ausgehen und sich außerhalb des Solenoids schließen, in sich selbst zurückkehren. Man erhält so ein Feldliniensystem, in dem Streufeldlinien überhaupt nicht mehr oder nur in sehr

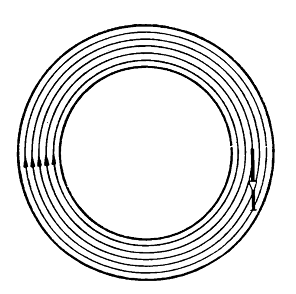


Abb. 48. Idealisiertes Kraftfeld eines Toroids

geringem Maße vorkommen (Abb. 48). Die magnetische Feldstärke beträgt im Innern eines Toroids

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{NI}{2\pi R}.$$

Wirksamer als die bisher behandelten einlagigen Spulen sind Spulen mit mehrlagiger Bewicklung (Abb. 49). Eine solche Spule entspricht mehreren ineinandergelegten einlagigen Spulen, deren magnetische Felder sich in der

Spulenachse summieren. Welche Maximalerregung überhaupt erreicht werden kann, hängt davon ab, wie groß die zur Verfügung stehende Fläche des ganzen Spulenquerschnitts ist. Ist die Größe des Spulenquerschnitts konstruktiv schon gegeben, so hängt die maximal erreichbare Erregung NI sowohl von N

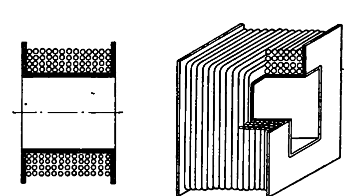


Abb. 49. Eine in der Praxis verwendete Spulenanordnung

als auch von I ab. Die zulässige Stromstärke hängt vom Querschnitt der gesamten Spulenwicklung ab. Als grober Richtwert kann eine Stromdichte von 2 bis 3 A/mm^2 angenommen werden.

In Abb. 50 sind einige in der Praxis auftretende Erregungswerte angeführt.

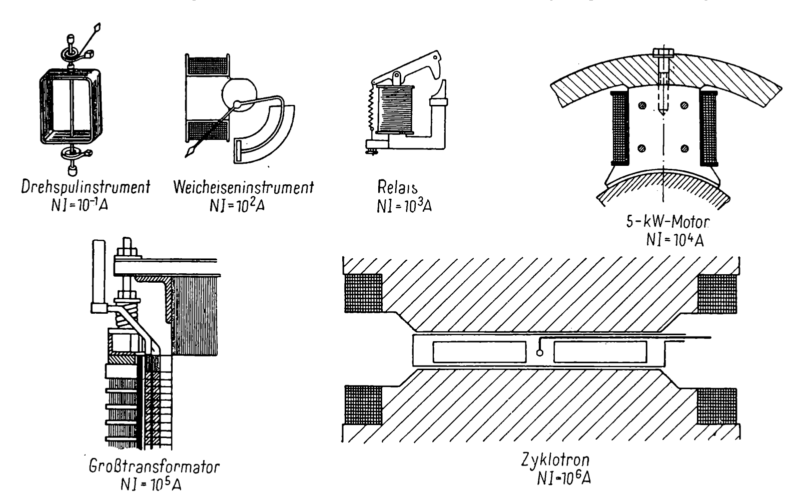


Abb. 50. In der Praxis vorkommende Erregungswerte

3. Die Gleichung (2.4.6) ist eine *Näherungsformel* zur Berechnung der magnetischen Feldstärke in der Achse eines sehr langen Solenoids. Ist z. B. $l = 15$ cm, $d = 2$ cm, $N = 150$ und $I = 1{,}5$ A, so liefert die Näherungsformel

$$H = \frac{NI}{l} = 1500\,\frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Verwendet man die exakte Gleichung (2.4.5), so gilt in der Mitte der Spule mit

$$\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2 = \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + (d/2)^2}} = \frac{7{,}5}{\sqrt{7{,}5^2 + 1^2}} = 0{,}991$$

$$H_0 = \frac{NI}{2l}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = \frac{150 \cdot 1{,}5}{2 \cdot 0{,}15} \cdot 2 \cdot 0{,}991 = 1485\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.$$

Am Rande der Spule ist dagegen

$$\cos\alpha_1 = \frac{l}{\sqrt{l^2 + (d/2)^2}} = \frac{15}{\sqrt{15^2 + 1^2}} = 0{,}998,$$

$$\cos\alpha_2 = 0$$

und folglich

$$H_1 = \frac{150 \cdot 1{,}5}{2 \cdot 0{,}15} \cdot 0{,}998 = 750\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \approx \frac{H_0}{2}.$$

Für die Berechnung der magnetischen Feldstärke längs der Achse einer langen Spule liefert die Gleichung (2.4.6) also keine besonders gute Näherung. Die erreichbare Genauigkeit ist aber in vielen Fällen hinreichend.

4. Bisher wurde eine Spule als eine Reihenschaltung einzelner kreisförmiger Windungen gedacht. Jetzt soll der axiale Verlauf des magnetischen Feldes in einer spiralförmigen Spule bestimmt werden. Die Spule habe den Radius a und bestehe aus N Windungen mit einer Ganghöhe p. Den Koordinatenursprung legen wir in die Mitte der Spule (Abb. 51). Die Gleichung der Spirale lautet

$$x = a\cos\varphi; \quad y = a\sin\varphi; \quad z = \frac{p}{2\pi}\varphi.$$

Im Punkt $z = \xi$ beträgt die Komponente des magnetischen Feldes in Richtung der z-Achse

$$H_z = \frac{I}{4\pi}\int\frac{[d\mathfrak{s} \times \mathfrak{r}]_z}{r^3} = \frac{I}{4\pi}\int\frac{r_y\,dx - r_x\,dy}{r^3}.$$

Aus der Abb. 51 bzw. aus der Gleichung der Spirale kann

$$r_x = x = a\cos\varphi; \quad r_y = y = a\sin\varphi; \quad r_z = z - \xi = \frac{p}{2\pi}\varphi - \xi$$

abgelesen werden. Die Komponenten des Bogenelementes in Zylinderkoordinaten sind

$$ds_x = dx = -a \sin \varphi \, d\varphi;$$

$$ds_y = dy = a \cos \varphi \, d\varphi;$$

$$ds_z = dz = \frac{p}{2\pi} d\varphi.$$

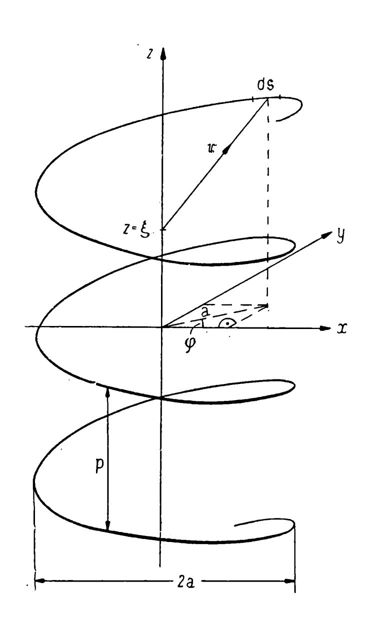


Abb. 51. Berechnung des Feldes einer Spirale

Nach Einsetzen in die obige Gleichung erhält man

$$H_z = \frac{I}{4\pi} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{d\varphi}{a\left[1 + \left(\varphi \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{1}{a} - \frac{\xi}{a}\right)^2\right]^{3/2}},$$

wobei $\frac{N}{2} \cdot 2\pi = \varphi_0$ die Grenzen des Integrals nach dem Argument φ bestimmt.

Unsere Gleichung kann explizit folgendermaßen ausgewertet werden:

$$H_z = \frac{I}{2p} \left\{ \frac{\frac{Np}{2} + \xi}{\left[a^2 + \left(\frac{Np}{2} + \xi\right)^2\right]^{1/2}} - \frac{\frac{Np}{2} - \xi}{\left[a^2 + \left(\frac{Np}{2} - \xi\right)^2\right]^{1/2}} \right\}$$

$$= \frac{I}{2p} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1).$$

Führt man noch die Länge $L = Np$ der Spule ein, folgt

$$H_z = \frac{NI}{2L} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1).$$

Diese Gleichung ist mit der Gleichung (2.4.5) identisch.

Hier ist jedoch H_z nicht die einzige Komponente. Für die Komponente in x-Richtung erhält man z. B.

$$H_x = \frac{I}{4\pi} \int \frac{r_z\, ds_y - r_y\, ds_z}{r^3} = \frac{I}{4\pi} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\frac{ap}{2}(-\varphi \cos \varphi + \sin \varphi)\, d\varphi}{r^3}.$$

Diese ist im allgemeinen von Null verschieden. Die Kraftlinien verlaufen nicht einmal in unmittelbarer Nähe der Achse zu dieser parallel, sondern spiralförmig.

2.5. Die unmittelbare Messung der magnetischen Feldstärke

Die magnetische Feldstärke kann mit Hilfe eines kleinen Solenoids unmittelbar gemessen werden. Dazu wird im Zentrum eines Solenoids, dessen Durchmesser klein gegen seine Länge ist, eine Magnetnadel angebracht. Diese wird

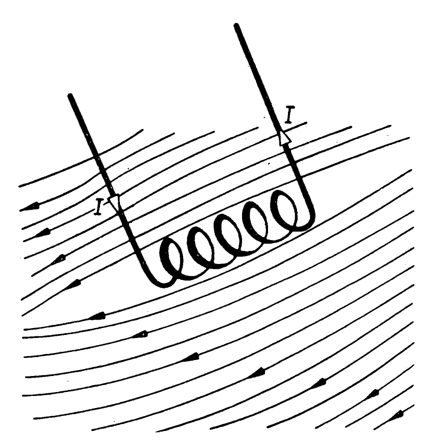


Abb. 52. Das zu messende Feld wird durch das Feld eines Solenoids „kompensiert". Als „Nullindikator" kann z. B. eine Magnetnadel angewendet werden

bei Vorhandensein eines magnetischen Feldes aus ihrer Ruhestellung abgelenkt werden. Wird dieses Gerät in ein beliebiges Magnetfeld gebracht und werden sowohl die Richtung der Spule als auch die Größe des darin fließenden Stromes so lange geändert, bis die Magnetnadel wieder ihre Nullstellung einnimmt, so wird das ursprüngliche Feld an diesem Ort durch das

erzeugte magnetische Feld des Solenoids nach Richtung und Größe gerade kompensiert (Abb. 52). Die magnetische Feldstärke ist dann an diesem Ort aus der gemessenen Stromstärke im Solenoid und ihrer Windungszahl pro Längeneinheit nach Gleichung (2.4.5) zu berechnen:

$$H = \frac{NI}{l}.$$

Es wurde bereits betont, daß mit der Einführung einer Dimension einer physikalischen Größe gleichzeitig auch eine Anleitung gegeben werden muß, mit welchen physikalischen Geräten diese Größe zu messen ist. Im allgemeinen

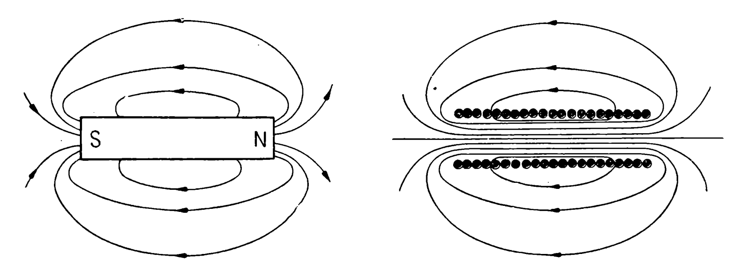


Abb. 53. Äußeres Feld eines Solenoids und eines Permanentmagneten

ist es in der Physik üblich, die magnetischen Grundgrößen mit Hilfe der Dauermagneten einzuführen, z. B. die Induktion B mit Hilfe eines auf eine Magnetnadel wirkenden magnetischen Momentes zu definieren und zu messen. Vergleicht man das magnetische Feld eines Dauermagneten mit dem magnetischen Feld eines Solenoids (Abb. 53), so ist deren Ähnlichkeit unverkennbar. Später werden wir sehen, daß das magnetische Feld eines Dauermagneten durch kleine molekulare Ringströme im Innern des Stoffes erzeugt wird. So kann das magnetische Feld prinzipiell sowohl mit Hilfe der von uns angewendeten Methode der Stromkreise als auch mit Hilfe eines Dauermagneten gemessen und definiert werden. Bei unserer Methode wird aber eine viel engere Verbindung zwischen der Messung physikalischer Größen und deren folgerichtiger Definition hergestellt.

2.6. Das Durchflutungsgesetz

Vom BIOT-SAVARTschen Gesetz ausgehend, werden wir im folgenden einen Zusammenhang zwischen Strom und magnetischem Feld finden, der im Vakuum dem BIOT-SAVARTschen Gesetz gleichwertig ist, jedoch ohne

Schwierigkeiten auch auf magnetische Felder im Innern eines Stoffes verallgemeinert werden kann. Damit wird dieses Gesetz, sowohl vom Prinzip her als auch vom praktischen Standpunkt aus gesehen, von ausschlaggebender Bedeutung sein. Die magnetische Feldstärke in der Umgebung eines unendlich langen, geraden Leiters ist nach Gl. (2.4.1)

$$H = \frac{I}{2\pi R}.$$

Wir denken uns rings um den unendlich langen Leiter einen Kreis von beliebigem Radius und unterteilen seinen Umfang in gleiche Abschnitte dl.

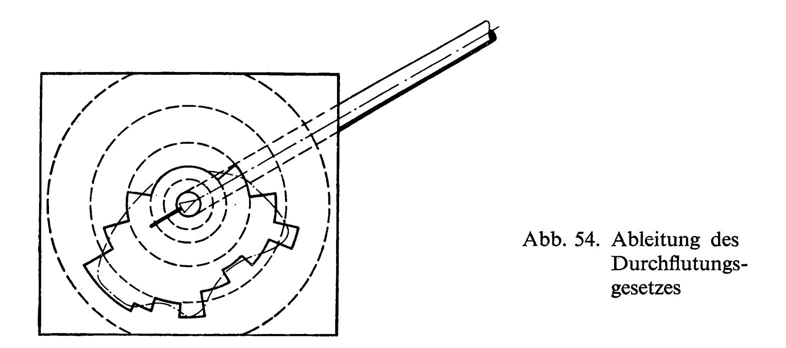


Abb. 54. Ableitung des Durchflutungsgesetzes

Multipliziert man jeden Abschnitt mit der ihm zugehörenden Feldstärke und summiert diese Produkte, so erhält man

$$\lim \sum \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = H \cdot 2\pi R = \frac{I}{2\pi R} \cdot 2\pi R = I.$$

Man erhält also als Ergebnis, daß das Linienintegral der Feldstärke längs eines geschlossenen Kreises gleich der im geraden Leiter fließenden Stromstärke ist. Dabei kommt der Kreishalbmesser nicht mehr in der Endformel vor. Bewegt man sich nämlich auf einem Kreis mit größerem Radius, so wird zwar der Weg länger, die Feldstärke an diesen Orten aber entsprechend kleiner sein.

Es ist leicht zu erkennen, daß man dasselbe Ergebnis erhält, wenn der Integrationsweg eine beliebige geschlossene Kurve ist. Diese kann nämlich stets mit beliebiger Genauigkeit durch Kreisbögen und Halbmesserstücke angenähert werden (Abb. 54). Die über die Radien erstreckten Anteile des Linienintegrals zählen nicht, weil dort $\mathfrak{H}$ auf der Fortschreitungsrichtung senkrecht steht und in sämtlichen Punkten der Kurve das Skalarprodukt aus Kurven-

abschnitt und zugeordneter Feldstärke zu nehmen ist. Deshalb gilt für eine beliebige geschlossene Kurve, die einen geraden Leiter umgibt, der Satz, daß das Linienintegral der magnetischen Feldstärke gleich der umschlossenen Stromstärke ist. Dieser Satz kann sehr weitgehend verallgemeinert werden.

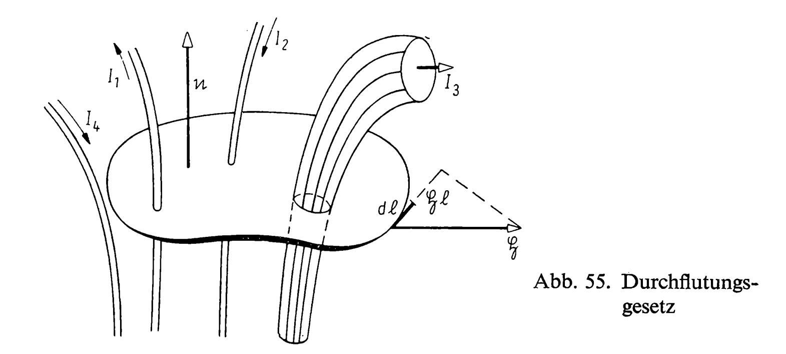


Abb. 55. Durchflutungsgesetz

Er wird nicht unter Zugrundelegung des BIOT-SAVARTschen Gesetzes bewiesen — obwohl dies möglich wäre —, sondern lediglich durch experimentelle Tatsachen begründet. Die Verallgemeinerung dieses Satzes können wir folgendermaßen formulieren (Abb. 55):

Denkt man sich in einem beliebigen, von Strömen durchflossenen Feld eine beliebige geschlossene Linie, so ist das Linienintegral der magnetischen Feldstärke längs dieser geschlossenen Linie gleich der Summe aller Ströme, die durch die von der geschlossenen Linie aufgespannte Fläche hindurchfließen. Dabei sind die in Richtung der positiven Flächennormalen hindurchgehenden Ströme mit positivem Vorzeichen zu versehen, wobei der Umlaufsinn auf der Linie gemäß der Rechtsschraubenregel festgelegt ist. Dieser Satz ist das *Durchflutungsgesetz.* Mathematisch formuliert lautet es

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \sum I.$$

Wird die Fläche in vektorielle Flächenelemente $d\mathfrak{A}$ unterteilt und ist $\mathfrak{S}$ der Stromdichtevektor, dann ist die durch ein beliebiges Flächenelement hindurchgehende Stromstärke gleich $\mathfrak{S}\, d\mathfrak{A}$ und die Summe der Ströme durch die Fläche

$$\sum I = \int \mathfrak{S}\, d\mathfrak{A}.$$

Auf Grund dieser Beziehung kann das Durchflutungsgesetz auch geschrieben werden

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \int \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A}.$$

Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke längs einer geschlossenen Kurve ist demnach gleich dem Flächenintegral der Stromdichte, das über die von dieser Kurve umschlossene Fläche zu erstrecken ist. Zum Wert des Linienintegrals tragen nur jene Ströme bei, die von der geschlossenen Kurve umschlungen werden. Allerdings heißt das nicht, daß das magnetische Feld nicht durch einen Strom verzerrt wäre, der außerhalb der Kurve fließt (z. B. der Strom I_4 in Abb. 55). Diese Verzerrung wird jedoch bewirken, daß der Wert des Linienintegrals an einer Stelle um so viel zunimmt, wie er längs eines anderen Abschnittes abnimmt.

Die magnetische Feldstärke in einem beliebigen Raumpunkt kann mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes allerdings nur dann berechnet werden, wenn der Verlauf des magnetischen Feldes längs des geschlossenen Integrationsweges irgendwie – wenigstens auf Grund von Symmetrieüberlegungen – bekannt ist. Die Bedeutung dieses Gesetzes liegt jedoch darin, daß es ganz allgemein gilt, selbst dann, wenn im Feld beliebige ferromagnetische Stoffe vorhanden sind.

Das magnetische Feld $\mathfrak{H}$ in Luft (oder genauer im Vakuum) ist ein Wirbelfeld. $\oint \mathfrak{H} d\mathfrak{l}$ wird *Wirbelstärke* genannt. Da diese mit dem gesamten umschlungenen Strom in Zusammenhang steht, kann man schon ahnen, daß die Wirbeldichte des Feldes $\mathfrak{H}$ einfach mit der Stromdichte zusammenhängen wird. Dabei sind im Vakuum sowohl das Feld $\mathfrak{H}$ als auch das Feld $\mathfrak{B}$ quellenfrei.

2.7. Die Anwendung des Durchflutungsgesetzes

2.7.1. *Das Feld einer Spule*

Als einfache, jedoch instruktive Anwendung des Durchflutungsgesetzes soll die magnetische Feldstärke im Innern der in Abb. 56 gezeigten Spule, deren Länge im Verhältnis zum Durchmesser groß ist, berechnet werden.

Man zeichne zunächst den qualitativen Verlauf der Kraftlinien ein und wende das Durchflutungsgesetz für die geschlossene Linie 1 – 2 – 3 – 4 – 1 an.

Das Linienintegral läßt sich in folgende Teile zerlegen:

$$\oint_L \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \int_{12} \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} + \int_{23} \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} + \int_{34} \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} + \int_{41} \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l}.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite kann einfach bestimmt werden. Das magnetische Feld ist nämlich im Spuleninnern längs der ganzen Linie angenähert konstant und verläuft parallel zu dieser Linie. Mithin gilt

$$\int_{12} \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = H \int_{12} dl = Hl.$$

Die übrigen Summanden werden gleich Null gesetzt, weil die magnetische Feldstärke außerhalb der Spule — wie bereits erwähnt — vernachlässigbar klein ist.

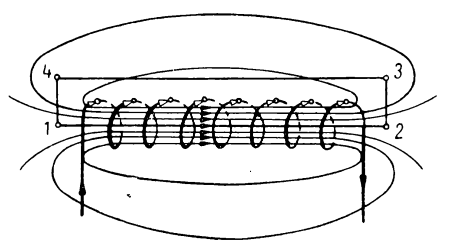


Abb. 56. Inneres Feld eines langen Solenoids

Es ist nun festzustellen, wieviel Strom durch die Fläche 1 — 2 — 3 — 4 — 1 insgesamt hindurchgeht. Ist der Strom im Leiter I, so geht dieser durch die Fläche so oft hindurch, und zwar stets in der gleichen Richtung, wie die Windungszahl der Spule angibt. Damit nimmt das Durchflutungsgesetz die einfache Form

$$Hl = NI$$

an, und man erhält die schon bekannte Gleichung

$$H = \frac{NI}{l}.$$

2.7.2. *Das Feld einer massiven Spule*

Ebenso leicht ist auch die magnetische Feldstärke im Innern einer massiven Spule zu berechnen. Die Länge der Spule wird im Vergleich zu ihrem größten Außendurchmesser als sehr groß angenommen. Die Windungszahl pro Flächeneinheit betrage n. Wir wenden das Durchflutungsgesetz für die in Abb. 57 gezogene geschlossene Linie an. Wird das Linienintegral über die außerhalb der Spule liegende Linie wieder vernachlässigt, so läßt sich schreiben

$$Hl = nIyl,$$

weil yl die umschlungene und vom Strom durchflossene Fläche, yln die Gesamtwindungszahl bedeuten. Hieraus ergibt sich die magnetische Feldstärke zu

$$H = nIy.$$

Dies bedeutet, daß die magnetische Feldstärke im Spuleninnern nicht homogen ist, sondern vom Außendurchmesser der Spule gegen die Spulenmitte zu linear anwächst.

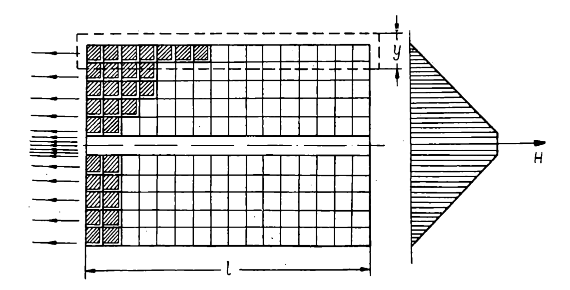


Abb. 57. Magnetisches Feld einer massiven Spule

2.7.3. *Das Feld in einer koaxialen Leitung*

Es soll nun das magnetische Feld einer Leiteranordnung gemäß Abb. 58 untersucht werden. Im inneren Zylinder fließe ein Strom, der im äußeren Zylinder zurückgeleitet wird (Koaxialkabel). Aus Symmetriegründen kann angenommen werden, daß der Wert des magnetischen Feldes nur vom Radius

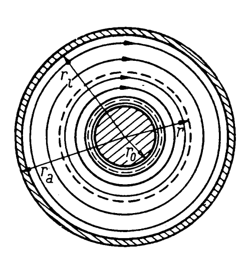


Abb. 58. Berechnung des magnetischen Feldes eines Koaxialkabels

abhängt, wobei die Kraftlinien konzentrische Kreise darstellen. Wird das Durchflutungsgesetz für den in der Abbildung gestrichelt gezeichneten Kreis angewendet, so folgt

$$2\pi rH = I$$

und damit für die magnetische Feldstärke

$$H = \frac{I}{2\pi\, r}.$$

Das ist das gleiche Ergebnis, das wir für die Feldstärke in der Umgebung eines einzelnen Leiters gefunden haben. Das magnetische Feld hat auf der Fläche des inneren Zylinders mit

$$H_0 = \frac{I}{2\pi\, r_0}$$

seinen größten Wert, nimmt von hier aus hyperbolisch ab und erreicht seinen kleinsten Wert auf der Innenfläche des äußeren Zylinders (Abb. 59).

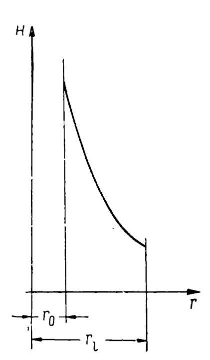


Abb. 59. Verlauf des magnetischen Feldes im Innern eines Koaxialkabels

2.7.4. *Das axialsymmetrische Feld im Innern der Leitungen*

Nun soll das magnetische Feld im Innern eines zylindrischen Leiters von endlicher Dicke untersucht werden, wenn die Stromverteilung längs des Leiterquerschnittes homogen ist (Abb. 60). Bei Gleichstrom ist diese Homogenität gesichert. Die magnetischen Kraftlinien werden aus Symmetriegründen konzentrische Kreise sein. Der Integrationsweg umschließt jetzt nicht den Gesamtstrom. Ist die Stromdichte $G = \frac{I}{r_0^2\, \pi}$, so ist der vom Integrationsweg umschlossene Strom gleich

$$G r^2 \pi.$$

Das Durchflutungsgesetz lautet dann

$$H \cdot 2\pi r = G r^2 \pi,$$

woraus sich der Wert der magnetischen Feldstärke zu

$$H = \frac{Gr}{2} = \frac{I}{r_0^2 \pi} \frac{r}{2}$$

ergibt.

Die magnetische Feldstärke nimmt also im Innern des Leiters bis zur Leiteroberfläche linear zu.

Auf Grund unserer bisherigen Erörterungen kann nun auch die Frage beantwortet werden, wie das magnetische Feld im Innern massiver Innen- und

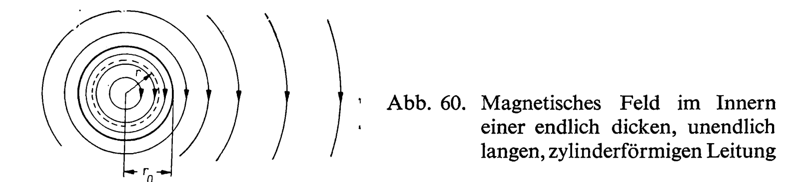


Abb. 60. Magnetisches Feld im Innern einer endlich dicken, unendlich langen, zylinderförmigen Leitung

Außenleiter einer Koaxialleitung und außerhalb der Leitung beschaffen ist, vorausgesetzt, daß die Stromverteilung in beiden Leitern homogen ist. Unter Anwendung des Durchflutungsgesetzes auf einen Kreis im Innern der Innenleitung erhält man in der vorher behandelten Weise eine lineare Feldzunahme bis zum Maximalwert $H_0 = \frac{I}{2\pi r_0}$ an der Oberfläche der inneren Leitung. Von hier aus nimmt das magnetische Feld bis zur Innenfläche des Außenleiters auf den Wert

$$H_i = \frac{I}{2\pi r_i}$$

hyperbolisch und dann im dünnen Außenleiter bis zur Außenfläche weiter angenähert linear auf Null ab (Abb. 61). (Der genaue Verlauf wird bei den nachfolgenden Beispielen berechnet.) Im äußeren Raum erhält man kein magnetisches Feld, weil die Summe der Ströme durch eine Fläche, die von einem konzentrischen Kreis berandet wird, der die koaxiale Leitung umschließt, gleich Null ist, womit auch der Wert des Integrals verschwindet. Hieraus folgt, daß die magnetische Feldstärke Null ist, weil die Feldlinie aus Symmetriegründen auch diesmal ein Kreis sein muß.

Auf einen Umstand sei noch besonders hingewiesen: Aus der Tatsache, daß bei verschwindender Summe von Strömen, die durch eine vom Integrationsweg berandete Fläche hindurchgehen, das Linienintegral des magnetischen Feldes

verschwindet, kann keinesfalls gefolgert werden, daß das magnetische Feld selbst Null wäre. Es soll z. B. in ein magnetisches Feld, das von beliebigen Strömen erzeugt wurde, eine beliebige geschlossene Kurve so gelegt werden, daß durch die umschlossene Fläche keine Ströme gehen. Damit ist das Linienintegral des magnetischen Feldes Null, obwohl das magnetische Feld durchaus einen endlichen Wert besitzt. Das Linienintegral verschwindet deshalb, weil an einigen Abschnitten der Kurve das Feld dem Umlaufsinn entgegengerichtet, an anderen wiederum gleichgerichtet ist. Erscheint es aus irgendeinem Grunde als gesichert, daß die Richtung des magnetischen Feldes längs des ganzen Integrationsweges mit dessen Umlaufsinn übereinstimmt – wie es im vorstehenden Fall durch Symmetriebetrachtungen gewährleistet war – so kann, aber auch nur dann, vom Verschwinden des Linienintegrals auf das Verschwinden der Feldstärke geschlossen werden.

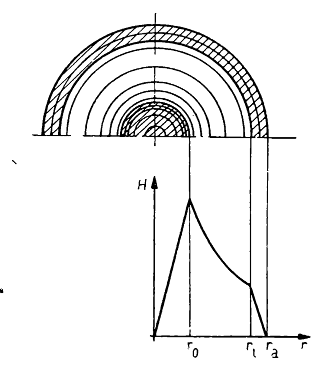


Abb. 61. Magnetisches Kraftfeld eines Koaxialkabels unter Berücksichtigung des inneren Feldes der Leiter

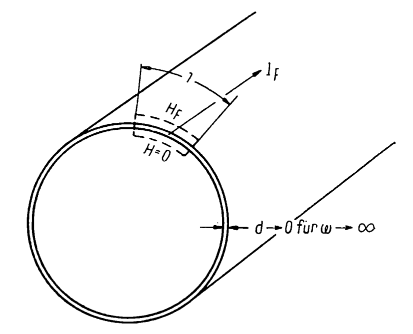


Abb. 62. Zusammenhang zwischen Flächenstromdichte und dem magnetischen Feld

2.7.5. *Zusammenhang zwischen der Flächenstromdichte und der magnetischen Feldstärke*

Mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes kann eine einfache Beziehung zwischen den Oberflächenströmen und dem magnetischen Feld, das in Nähe der Oberfläche gemessen werden kann, aufgestellt werden. Wir werden später zeigen, daß bei sehr großen Frequenzen meßbare Werte des Stromes nur in oberflächennahen Bereichen des Leiters angenommen werden können. Wir denken uns aus dem Leiter gemäß Abb. 62 ein auf der Stromrichtung senkrecht stehendes Stück von der Breite 1 herausgeschnitten und wenden das Durchflutungsgesetz auf den in der Abbildung dargestellten Umlauf und die eingeschlossene

Fläche an. Durch die Fläche geht der auf die Einheitsbreite entfallende Strom hindurch. Durch den Wert des Linienintegrals wird nur im Raumteil außerhalb des metallischen Leiters ein von Null verschiedener Wert geliefert. Dieser beträgt

$$1 \cdot H_F = I_F .$$

Besitzt das magnetische Feld nur eine auf der Stromstärke senkrecht stehende Komponente, so kann geschrieben werden

$$H = I_F .$$

In dieser Gleichung bezeichnet I_F den auf die Längeneinheit des Umfanges entfallenden Strom, dessen Maßeinheit mithin A/m ist.

Dieses Ergebnis kann bei einem Koaxialkabel unmittelbar beobachtet werden: Wird aus dem äußeren Zylinder längs des Umfanges ein Stück von der Länge 1 herausgeschnitten, so fließt darin der Strom

$$I_F = \frac{I}{2\pi r_i} = H_i ,$$

was mit dem dort meßbaren magnetischen Feld übereinstimmt.

Beispiele und Ergänzungen

1. Es soll der Verlauf des magnetischen Feldes im Innenleiter eines Koaxialkabels, zwischen beiden Leitern und im äußeren Leiter bestimmt werden (Abb. 58), wenn

$$r_0 = 4\,\text{mm}, \quad r_i = 10\,\text{mm}, \quad r_a = 12\,\text{mm}, \quad I = 80\,\text{A}$$

sind.

Wir nehmen an, daß die Stromverteilung in der Leitung homogen ist. Wird das Durchflutungsgesetz auf einen konzentrischen Integrationsweg im Innenleiter angewandt, so gilt

$$H_1 \cdot 2\pi r = \frac{I}{r_0^2 \pi} r^2 \pi ,$$

$$H_1 = \frac{I}{2 r_0^2 \pi} r = \frac{80}{2 \cdot 16 \cdot 10^{-6} \pi} r = 7{,}5 \cdot 10^5 r, \quad r \leqq r_0 .$$

Auf der Oberfläche des Innenleiters ($r = r_0$) ist

$$H_0 = \frac{I}{2 r_0 \pi} = 7{,}5 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 3000 \frac{\text{A}}{\text{m}} .$$

Für den Raum zwischen beiden Leitern findet man

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} = \frac{80}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} = 12{,}75 \cdot \frac{1}{r}, \quad r_0 \leqq r \leqq r_i.$$

Auf der Innenfläche des äußeren Leiters ($r = r_i$) wird

$$H_i = \frac{I}{2\pi r_i} = \frac{12{,}75}{10^{-2}} = 1275 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Das Durchflutungsgesetz, auf einen konzentrischen Kreis im äußeren Leiter angewendet, liefert

$$H_3 \cdot 2\pi r = I - \frac{I}{(r_a^2 - r_i^2)\pi}(r^2 - r_i^2)\pi = I \frac{r_a^2 - r^2}{r_a^2 - r_i^2},$$

$$H_3 = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{r_a^2 - r_i^2} \left[\frac{r_a^2}{r} - r\right] = 2{,}9 \cdot 10^5 \left[\frac{1{,}44 \cdot 10^{-4}}{r} - r\right], \quad r_i \leqq r \leqq r_a.$$

Auf der Außenfläche des äußeren Leiters ($r = r_a$) ergibt sich $H_a = 0$, wie es bereits gefordert wurde.

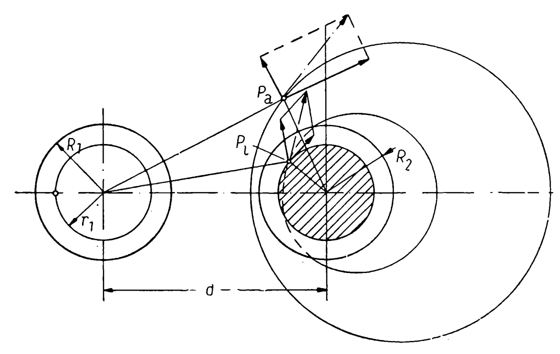


Abb. 63. Berechnung des magnetischen Feldes zweier Leiter mit endlichem Querschnitt. R_1 und R_2 sind die Halbmesser der Leitungen

2. Das magnetische Feld paralleler Leiter mit endlichem Querschnitt ist außerhalb der Leitung sehr einfach. Das Feld eines jeden Leiters kann unter der Annahme berechnet werden, daß die Ströme in der Achse der Leitung fließen. Man erhält also kreisförmige Kraftlinien.

Nun kann der im Innern eines Leiters fließende Strom nur zum Teil in der Achse konzentriert werden, und zwar nur so viel, wie innerhalb des Kreises fließt, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Leitungsquerschnittes zusammenfällt (Abb. 63). Im Innern eines jeden Leiters findet man eine

Stelle (r_1), wo die Feldstärke Null ist. Die Bestimmungsgleichung für diese Stelle lautet

$$\frac{I}{2\pi}\left[\frac{r_1}{R_1^2} - \frac{1}{d + r_1}\right] = 0,$$

woraus sich

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + R_1^2} - \frac{d}{2}$$

ergibt.

Der analytische Ausdruck der Feldlinien ist nicht einfach, das Feldlinienbild ist in Abb. 64 gezeichnet.

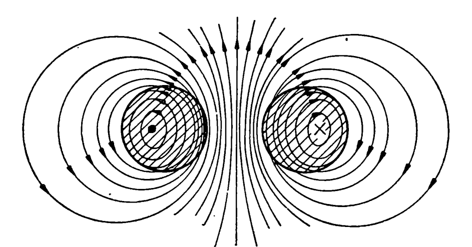


Abb. 64. Das magnetische Feld der Anordnung der Abb. 63

2.8. Der magnetische Fluß

Zur Darstellung des magnetischen Feldes haben wir die Feldlinien des Vektors $\mathfrak{H}$ oder die Induktionslinien des Vektors $\mathfrak{B}$ verwendet. Es wurde dabei schon vereinbart, daß diese Linien so dicht gezeichnet werden, daß durch die zu einem Punkt gehörende, senkrecht zu den Linien liegende Einheitsfläche gerade so viele Linien hindurchgehen, wie der dort herrschenden Feldstärke oder Induktion entsprechen. Durch eine Einheitsfläche gehen also bei einer homogenen Induktion B auch B Induktionslinien.

Als magnetischen Fluß oder Induktionsfluß bezeichnet man die Zahl der durch eine Fläche hindurchgehenden Induktionslinien oder, anders ausgedrückt, die Zahl der von der Randkurve der Fläche umschlossenen Induktionslinien. Steht die Fläche auf den Induktionslinien senkrecht und ist das Magnetfeld homogen (Abb. 65a), so beträgt der magnetische Fluß

$$\Phi = B \cdot A.$$

Die Dimension des magnetischen Flusses ist dementsprechend

$$[\Phi] = [B]\,[A] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^2 \mathrel{\hat{=}} \text{Vs}.$$

Durch eine beliebige Fläche geht der Fluß Eins hindurch, wenn von der die Fläche berandenden Kurve *eine* Induktionslinie umschlossen wird.

Steht die Fläche auf den Induktionslinien nicht senkrecht, so ist gemäß Abb. 65b die Zahl der durch die Fläche hindurchgehenden Induktionslinien

$$\Phi = \mathfrak{B}\mathfrak{A}.$$

Ist die Fläche von beliebiger Form und das Kraftfeld nicht homogen, so kann die Fläche in hinreichend kleine Flächenelemente $d\mathfrak{A}$ zerlegt werden, über denen die Teilflüsse $d\Phi$ wieder als homogen betrachtet werden können:

$$d\Phi = \mathfrak{B}\, d\mathfrak{A}.$$

Der Gesamtfluß ergibt sich dann aus dem Flächenintegral über sämtliche Elemente $\mathfrak{B}\, d\mathfrak{A}$

$$\Phi = \int \mathfrak{B}\, d\mathfrak{A}. \tag{2.8.1}$$

Die zahlenmäßige Auswertung des Flächenintegrals stößt meist auf sehr große mathematische Schwierigkeiten und kann im allgemeinen nur numerisch oder graphisch durchgeführt werden. Normalerweise ist es viel einfacher, den

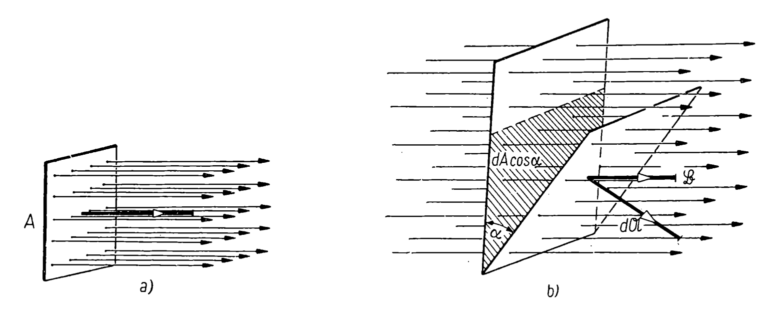


Abb. 65. Berechnung des magnetischen Flusses

Fluß unmittelbar zu messen. Gemäß der Definitionsgleichung (2.8.1) läßt sich die Messung des Flusses auf eine Induktionsmessung und eine Flächenmessung zurückführen. Später werden wir erfahren können, daß gerade der Fluß mit dem Spannungsmesser unmittelbar zu messen ist. Es wird auch für die Messung der Induktion ein Verfahren zu finden sein, das viel einfacher als das von uns bisher angewendete ist.

Wie bereits gesagt, kann die Fläche im magnetischen Feld beliebig gewählt werden. Wie sie in der Praxis gewählt wird, hängt immer von der Natur der

zu lösenden Aufgabe ab. Die Fläche kann z. B. von einem Stromkreis berandet sein. Das magnetische Feld kann dabei vom Strom eines anderen Stromkreises hervorgerufen sein. Besonders interessante und wichtige Aufgaben sind solche, bei denen der Fluß bestimmt wird, der mit dem ihn erzeugenden Stromkreis verkettet ist. Hier integriert man über die Fläche, die durch den Stromkreis selbst gegeben ist. In diesem Fall spricht man vom *Gesamtfluß*.

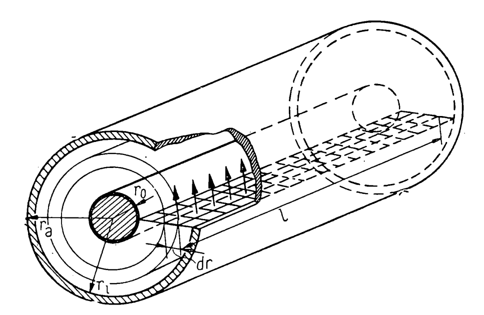


Abb. 66. Magnetischer Fluß im Koaxialkabel

Als Beispiel sei die Berechnung des Gesamtflusses einer Koaxialleitung besprochen. Im Zwischenraum zwischen den Leitern kann der Fluß längs des in Abb. 66 gezeichneten elementaren Ringes als konstant betrachtet werden. Der hindurchgehende Fluß beträgt

$$d\Phi = \mu_0 \frac{I}{2\pi\, r}\, l\, dr .$$

Integration über den inneren Zwischenraum liefert den Gesamtfluß

$$\Phi = \int_{r_0}^{r_i} \mu_0 \frac{I}{2\pi\, r}\, l\, dr = \mu_0 \frac{Il}{2\pi} \ln \frac{r_i}{r_0} .$$

Der Fluß im Innenleiter kann bei homogener Stromverteilung ganz ähnlich berechnet werden. Der elementare Fluß eines differentiellen Kreisringes ist hier

$$d\Phi = \mu_0 \frac{I}{2\pi\, r_0^2}\, rl\, dr$$

und damit der Gesamtfluß

$$\Phi = \int_{0}^{r_0} \mu_0 \frac{Il}{2\pi\, r_0^2}\, r\, dr = \frac{\mu_0\, Il}{4\pi} .$$

Analog erhält man für den Fluß im Außenleiter

$$\Phi = \int_{r_i}^{r_a} \mu_0 \frac{I}{2\pi} \frac{l}{r_a^2 - r_i^2} \left[\frac{r_a^2}{r} - r\right] dr = \frac{\mu_0 Il}{4\pi} \left[\frac{2r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \ln \frac{r_a}{r_i} - 1\right].$$

Für einen dünnen äußeren Leiter ist eine Näherung[1])

$$\Phi \approx \mu_0 \frac{Il}{4\pi} \frac{r_a - r_i}{r_i}.$$

Damit wird der gesamte magnetische Fluß eines Koaxialkabels

$$\Phi = \mu_0 \frac{Il}{2\pi} \left(\ln \frac{r_i}{r_0} + \frac{1}{2} + \frac{r_a - r_i}{2 r_i}\right). \tag{2.8.2}$$

Bei paralleler Doppelleitung kann die Induktion in einem Streifen von der differentiellen Breite dx in einer beiden Leitungen gemeinsamen Ebene als

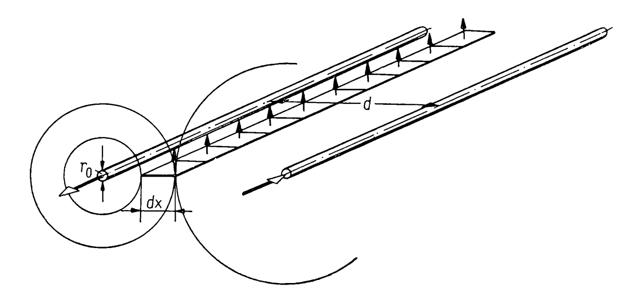


Abb. 67. Magnetischer Fluß bei parallelen Leitern

konstant angenommen werden (Abb. 67). Der Fluß durch diese differentielle Fläche ist

$$d\Phi = \mu_0 \frac{I}{2\pi x} l\, dx + \mu_0 \frac{I}{2\pi(d - x)} l\, dx,$$

und damit erhält man für den Fluß durch die Ebene zwischen beiden Leitern

$$\Phi = \int_{r_0}^{d - r_0} \mu_0 \frac{Il}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d - x}\right) dx = \frac{\mu_0 Il}{\pi} \ln \frac{d - r_0}{r_0}. \tag{2.8.3}$$

---

[1]) Für $r_a \approx r_i$ und $\frac{r_a}{r_i} < 1$ ist $\ln \frac{r_a}{r_i} \approx \frac{r_a - r_i}{r_i}$ und $r_a + r_i \approx 2r_a$.

Damit wird

$$\Phi \approx \frac{\mu_0 Il}{4\pi} \left[\frac{2r_a^2}{r_a + r_i} \frac{1}{r_i} - 1\right] \approx \frac{\mu_0 Il}{4\pi} \left[\frac{2r_a^2}{2r_a r_i} - 1\right] = \frac{\mu_0 Il}{4\pi} \left[\frac{r_a - r_i}{r_i}\right].$$

Wird eine Spule in ein unabhängig existierendes Feld gebracht und soll der Gesamtfluß bestimmt werden, so muß eine Induktionslinie so oft gezählt werden, wie sie die in Abb. 68 gezeichnete Schraubenfläche durchstößt. In einem homogenen, zur Spulenachse parallelen Feld bekommen wir einen Gesamtfluß

$$\Phi_g = N\Phi,$$

wo N die Windungszahl und Φ den mit einer einzelnen Windung verketteten Fluß bedeuten.

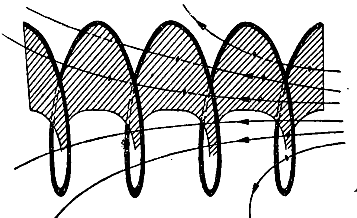


Abb. 68. Magnetischer Fluß im Solenoid

Wird dagegen das Feld durch den Spulenstrom selbst hervorgerufen, so berechnet man den Fluß bzw. den Gesamtfluß in folgender Weise:

Im Innern eines langen Solenoids ist die Induktion nach Gl. (2.4.6)

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}.$$

Ist der Radius der Spule r, so wird der magnetische Fluß durch den Querschnitt der Spule

$$\Phi = Br^2 \pi = \mu_0 \pi r^2 \frac{NI}{l} = \mu_0 A \frac{NI}{l}$$

und der mit der Spule verkettete Gesamtfluß

$$\Phi_g = N\Phi = \mu_0 A \frac{N^2 I}{l}. \tag{2.8.4}$$

Dieselbe Gleichung gilt auch für den Gesamtfluß einer ringförmigen Spule mit der Länge $l = 2\pi R$.

Im nächsten Abschnitt werden mit Hilfe der hier berechneten Flußwerte die Selbstinduktionskoeffizienten einzelner Leiteranordnungen ermittelt, die für die Bestimmung der magnetischen Energie und der Induktionsspannung eine sehr große praktische Bedeutung haben.

Beispiele und Ergänzungen

1. Wie groß ist der Fluß durch den Querschnitt einer Spule von 15 cm Länge, 2 cm Durchmesser und 150 Windungen bei einer Stromstärke $I = 1{,}5$ A?

Für den Querschnitt der Spule errechnet man $A = 3{,}14 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$, die Feldstärke beträgt in der Spulenmitte $H_0 = 1485$ A/m (vgl. Beispiel 3 im Abschnitt 2.4.4, S. 45/46) und am Spulenende $H_1 = 750$ A/m. Damit ist der Fluß in der Spulenmitte

$$\Phi_0 = \mu_0 H_0 A = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1485 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-4} = 5{,}86 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Vs}$$

und am Spulenende

$$\Phi_1 = \mu_0 H_1 A = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 750 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-4} = 2{,}94 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Vs}.$$

Dies bedeutet, daß der längs des Spulenmantels aus- bzw. eintretende Fluß

$$\Phi' = \Phi_0 - \Phi_1 = 2{,}92 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Vs}$$

ist. Die dazugehörige Feldstärke ist wegen $B' = \dfrac{\Phi'}{d\pi l/2} = 6{,}2 \cdot 10^{-5}\,\dfrac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$

$$H' = \frac{B'}{\mu_0} = \frac{6{,}2 \cdot 10^{-5}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 50\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.$$

Während also der Streufluß die Hälfte des maximalen Flusses ist, beträgt die senkrechte Komponente des Streufeldes durchschnittlich 1/30 der Maximalfeldstärke H_0. Die Begründung hierfür ist, daß der Streufluß durch eine verhältnismäßig große Fläche hindurchgeht (die Mantelfläche ist gerade das 15fache des Querschnittes).

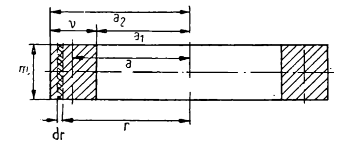


Abb. 69. Magnetischer Fluß bei einem Toroid mit quadratischem Querschnitt

2. Ein Toroid mit quadratischem Querschnitt und dem Halbmesser a besitze N Windungen (Abb. 69). Für die magnetische Feldstärke gilt

$$H = \frac{NI}{2\pi r}.$$

Der durch den Querschnitt hindurchgehende Fluß beträgt

$$\Phi = \int_{a_1}^{a_2} \mu_0 \frac{mNI}{2\pi r}\,dr = \frac{\mu_0}{2\pi} NIm \ln\frac{a_2}{a_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} NIm \ln\frac{a + \frac{v}{2}}{a - \frac{v}{2}}. \tag{2.8.5}$$

3. Der Querschnitt eines Toroids mit dem Radius a sei ein Kreis mit dem Radius r_0 (Abb. 70). Bei N Windungen gilt für die magnetische Feldstärke

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{NI}{2\pi} \frac{1}{a - \varrho \cos \varphi}$$

und für den Fluß

$$\Phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho \, d\varphi \, d\varrho}{a - \varrho \cos \varphi}.$$

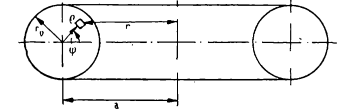


Abb. 70. Magnetischer Fluß einer Kreisspule

Das Integral über den Winkeln ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a - \varrho \cos \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - \varrho^2}}.$$

Damit berechnet sich der Gesamtfluß zu

$$\Phi = \mu_0 NI \int_0^{r_0} \frac{\varrho}{\sqrt{a^2 - \varrho^2}} d\varrho = \mu_0 NI \left[-\sqrt{a^2 - \varrho^2} \right]_0^{r_0} \tag{2.8.6}$$

$$= \mu_0 NI \left[a - \sqrt{a^2 - r_0^2} \right].$$

2.9. Begriff der Selbst- und Gegeninduktionskoeffizienten

Das Flächenintegral der magnetischen Induktion bzw. die Größe des magnetischen Flusses interessieren vor allem in zwei Aufgabengebieten, die eng miteinander verbunden sind und manchmal sogar zusammenfallen. Man will entweder wissen, wie groß die gesamte Feldlinienzahl bei gegebener Leiteranordnung und gegebener Stromverteilung ist – in diesen Fällen wird die geschlossene Kurve, die die Integrationsfläche umrandet und deren Durchgangsfluß berechnet werden soll, durch die Form des Stromkreises selbst bestimmt –, oder man will bei gegebener Leiteranordnung und Stromstärke den Fluß durch eine vom Stromkreis unabhängige Fläche berechnen.

Wenn sich im Raum keine ferromagnetische Materie befindet, so ist die Feldstärke und damit auch der Fluß bei jeder geometrischen Anordnung proportional der Stromstärke.

2.9.1. *Der Selbstinduktionskoeffizient*

Fließt in einem einzelnen Stromkreis ein Strom I, so kann demnach der mit diesem Stromkreis verkettete Fluß geschrieben werden

$$\Phi = LI. \tag{2.9.1}$$

Der durch diese Gleichung definierte Proportionalitätsfaktor wird Selbstinduktionskoeffizient genannt. Die Einheit der Selbstinduktion ist das Henry (H). Nach (2.9.1) gilt

$$[L] = \frac{[\Phi]}{[I]} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = \Omega\mathrm{s} = \mathrm{H}.$$

Bei einer ringförmigen oder unendlich langen Spule ist nach Gl. (2.8.4) der mit der Spule verkettete Gesamtfluß

$$\Phi = \mu_0 A \frac{N^2 I}{l}.$$

Die Induktivität der Spule ist deshalb

$$L = \mu_0 \frac{AN^2}{l}. \tag{2.9.2}$$

Für eine Spule von endlicher Länge ist diese Formel nicht mehr genau. Sie kann durch einen Faktor k, dessen Wert der Tabelle entnommen werden kann, korrigiert werden:

$$L = k \cdot \mu_0 \frac{AN^2}{l}. \tag{2.9.3}$$

Korrekturfaktor k in Gl. (2.9.3) für verschiedene Verhältnisse von Spulendurchmesser d zu Spulenlänge l

d/l	k	d/l	k	d/l	k
0,00	1,000	1,0	0,688	3,5	0,394
0,1	0,959	1,1	0,667	4,0	0,365
0,2	0,920	1,2	0,648	4,5	0,341
0,3	0,884	1,4	0,611		
0,4	0,850	1,6	0,580	5,0	0,320
0,5	0,818	1,8	0,551	6,0	0,285
0,6	0,789	2,0	0,526	7,0	0,258
0,7	0,761			8,0	0,237
0,8	0,735	2,5	0,472	9,0	0,219
0,9	0,711	3,0	0,429	10,0	0,203

2.9.2. *Der Gegeninduktionskoeffizient*

In der Abb. 71 sind zwei Stromkreise 1 und 2 gezeichnet. Im Stromkreis 1 soll der Strom I_1 fließen. Ein Teil des von I_1 erzeugten magnetischen Flusses

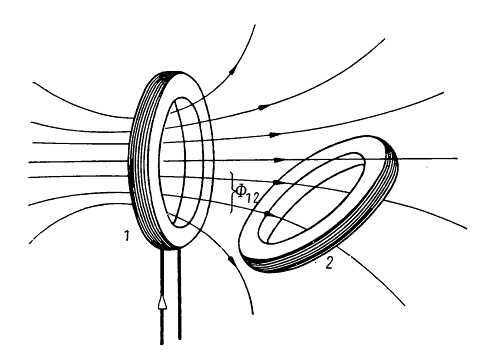


Abb. 71. Bestimmung des Gegeninduktionskoeffizienten

wird vom Stromkreis 2 umschlungen. Dieser Teilfluß sei Φ_{12}. Dieser Fluß ist natürlich auch der Stromstärke I_1 proportional, so daß wir schreiben können

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1 . \tag{2.9.4}$$

Den durch diese Gleichung definierten Faktor L_{12} nennt man den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion oder kurz Gegeninduktionskoeffizient. Die Bezeichnung „gegenseitig" wird durch den später noch zu beweisenden Satz gerechtfertigt, nach dem der gleiche Proportionalitätsfaktor auftritt, wenn der Strom im Kreis 2 fließt und der mit dem Kreis 1 verkettete Fluß Φ_{21} gesucht wird:

$$\Phi_{21} = L_{21} I_2 ,$$

wobei $L_{12} = L_{21} \equiv M$ ist.

Dieser Satz gilt aber nur, wenn sich kein ferromagnetischer Stoff in unserem Raum befindet. Sonst müssen wir zwischen dem Induktionskoeffizienten des Kreises 1, bezogen auf Kreis 2, und zwischen dem Induktionskoeffizienten des Kreises 2, bezogen auf Kreis 1, unterscheiden.

Die Berechnung der Gegeninduktivität ist im allgemeinen sehr kompliziert. Aus der gegebenen physikalischen Deutung kann man jedoch bei gewissen Leiteranordnungen einige Voraussagen über die Gegeninduktivität machen. Wenn zwei parallel angeordnete Spulen einander gegenüberstehen, so verringert sich die Gegeninduktivität mit zunehmender Entfernung beider Spulen voneinander, weil der Leiter 2 einen immer kleineren Teil des Flusses vom Strom des Leiters 1 umschließt. Aus demselben Grund vermindert sich die

Gegeninduktivität, wenn man in einer gegebenen Entfernung die Ebenen der beiden Spulen aus ihrer parallelen Lage dreht.

Im folgenden Fall kann man z. B. die Gegeninduktivität einfach berechnen. Über eine lange Spule 1 soll eine andere Spule 2 gezogen werden. Der Strom in der Spule 1 erzeugt den Fluß

$$\Phi = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l} A.$$

Im idealen Fall umschlingt der Leiter 2 diesen ganzen Fluß. Dann ist $\Phi_{12} = \Phi$, und die Gegeninduktivität wird

$$M = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} A.$$

Wenn im Raum mehrere Stromkreise vorhanden sind, so werden sämtliche Stromkreise mit dem einen oder anderen Teil des magnetischen Flusses, der von einem beliebigen Strom der Anordnung erzeugt wurde, verkettet. Vom Fluß Φ_k, der vom Strom im Stromkreis k erzeugt wird, umspannt der Kreis i den Flußanteil Φ_{ki}. Der gleiche Kreis umspannt vom Fluß Φ_l, der vom Stromkreis l erzeugt wird, den Teilfluß Φ_{li} usw. Dann ist der vom Kreis i umspannte Fluß insgesamt

$$\Phi_i = \Phi_{1i} + \Phi_{2i} + \ldots + \Phi_{ni}.$$

Da der Fluß Φ_{ki} durch den Strom I_k im k-ten Leiter zustande gekommen ist, folgt

$$\Phi_{ki} = L_{ki} I_k.$$

Es wird also der vom i-ten Kreis umspannte Gesamtfluß

$$\Phi_i = L_{1i} I_1 + L_{2i} I_2 + \ldots + L_{ni} I_n = \sum_{k=1}^{n} L_{ki} I_k. \tag{2.9.5}$$

Auch hier kann bewiesen werden, daß $L_{ik} = L_{ki}$ ist, wenn im Raum keine ferromagnetischen Stoffe vorhanden sind. Danach umschließt der Leiter i vom Kraftfluß, den der Strom im Leiter k erzeugt hat, gerade so viele Kraftlinien, wie der Leiter k vom Kraftfluß umschließt, den der gleichgroße Strom im Leiter i erzeugt hat.

Beispiele und Ergänzungen

1. Zwei parallele Leiter schließen sich in sehr großer Entfernung. Der Halbmesser der Leiter sei r_0, die Entfernung zwischen ihren Achsen d. Es ist die Induktivität zu bestimmen.

Der Kraftfluß, der entlang der Strecke l durch die Fläche zwischen den beiden Leitern hindurchtritt, beträgt nach Gl. (2.8.3)

$$\Phi = \mu_0 \frac{Il}{\pi} \ln \frac{d - r_0}{r_0}. \tag{2.9.6}$$

Da im allgemeinen $d \gg r_0$ ist, kann statt dessen geschrieben werden

$$\Phi \approx \mu_0 \frac{Il}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}.$$

Somit wird die Selbstinduktivität

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}. \tag{2.9.7}$$

Man gibt im allgemeinen die Selbstinduktivität, bezogen auf eine Strecke von 1 m, an. Die Selbstinduktivität pro Längeneinheit ist bei der gegebenen Leiteranordnung

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}. \tag{2.9.8}$$

Das im Innern der Leiter vorhandene magnetische Feld wurde hier vernachlässigt. Um auszudrücken, daß nur das äußere magnetische Feld berücksichtigt wurde, spricht man dann von der „äußeren Induktivität", deren Wert im allgemeinen eine sehr gute Näherung für die Gesamtinduktivität ist.

2. Für den eben besprochenen Doppelleiter seien $l = 25$ m, $d = 20$ cm und $r_0 = 1$ mm. Man erhält dann die Induktivität

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r_0} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 25}{\pi} \ln \frac{20}{0{,}1} = 53\ \mu\text{H}.$$

Die Gesamtlänge der Leitung ist $2l = 50$ m. Wickeln wir diesen Leiter zu einer geraden Spule mit einem Durchmesser von 6 cm auf, dann werden ihre Windungszahl $N = \frac{5000}{6\pi} = 265$ und bei einem Isolationszwischenraum zwischen den Windungen von $\delta = 1$ mm ihre Länge $l_{sp} = N(2r_0 + \delta) = 265\,(0{,}2 + 0{,}1) = 79{,}5$ cm. Die Induktivität dieser Spule ist nach Gl. (2.9.2)

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l_{sp}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 265^2 \frac{6^2\pi}{4} \cdot 10^{-4}}{0{,}795} = 318\ \mu\text{H}.$$

Die Spule hat fast das Sechsfache der Induktivität des Doppelleiters.

3. Es soll die Gegeninduktivität eines Leitersystems, welches aus den sehr langen parallelen Leitern $1' - 1''$ und $2' - 2''$ besteht, berechnet werden (Abb. 72).

Vom magnetischen Feld des Stromes I_1 im Leiter $1'$ ist der zwischen $r = a$ und $r = b$ befindliche Teil mit dem System $2' - 2''$ verbunden:

$$\Phi_{12} = \int_a^b \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r} l \, dr = \mu_0 \frac{I_1 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Im Leiter $1''$ fließt der Strom $-I_1$; dieser erzeugt denselben verketteten Fluß. Für die Gegeninduktivität erhält man also

$$M = \frac{N\Phi_{12}}{I_1} = \mu_0 \frac{l}{\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Die Berechnung ist auch dann einfach, wenn in der Anordnung der Leiter keinerlei Symmetrie besteht.

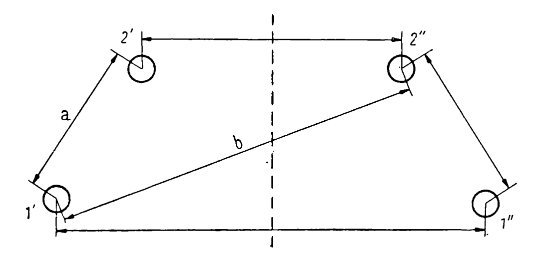


Abb. 72. Leitungsanordnung zu Beispiel 3. Die Anordnung ist symmetrisch bezüglich der gestrichelt gezeichneten Linie

4. Die Flächen zweier kreisförmiger Leiter seien parallel, ihre Mittelpunkte liegen auf einer zu den parallelen Ebenen senkrechten Geraden. Wenn diese weit entfernt voneinander oder ihre Abmessungen sehr verschieden sind, kann die Gegeninduktivität näherungsweise leicht bestimmt werden. Es sei der Halbmesser des größeren Kreises a, der des kleineren b, die Entfernung zwischen ihren Ebenen d.

Nach Gl. (2.4.2), S. 36, ist die magnetische Feldstärke, welche vom Strom I eines kreisförmigen Leiters mit dem Halbmesser a in der Entfernung d von der Ebene des Leiters erzeugt wird,

$$H = \frac{I}{2} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Wenn eine der oben gemachten Voraussetzungen zutrifft, kann man das in der Fläche des kleineren Kreises existierende magnetische Feld als konstant

und gleich dem obigen Wert annehmen. Der Kraftfluß durch diese Fläche wird dann

$$\Phi = \mu_0 H A = \mu_0 \frac{I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + d^2)^{3/2}} b^2 \pi .$$

Damit ist die Gegeninduktivität

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \pi}{2} \frac{a^2 b^2}{(a^2 + d^2)^{3/2}} .$$

Wenn, wie z. B. vorausgesetzt wurde, $d \gg a$ ist, vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$M \approx \frac{\mu_0 \pi}{2} \frac{a^2 b^2}{d^3} . \tag{2.9.9}$$

5. Im Innern einer Spule 1 ist eine kleinere Spule 2 drehbar angebracht (Abb. 73). Es ist die Gegeninduktivität zu bestimmen, wenn die kleinere

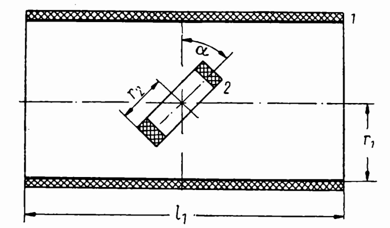


Abb. 73. Variometer

Spule um den Winkel α verdreht wird. Die Feldstärke im Innern der Spule 1 ist

$$H = \frac{N_1 I_1}{l_1}$$

und der Fluß durch die Spule 2

$$\Phi = \mu_0 H A_2 \cos \alpha = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l_1} r_2^2 \pi \cos \alpha .$$

Die Gegeninduktivität wird demnach

$$M = \frac{N_2 \Phi}{I_1} = \mu_0 \frac{r_2^2 \pi}{l_1} N_1 N_2 \cos \alpha . \tag{2.9.10}$$

Bei verschiedenen Winkeln erhalten wir also verschiedene Gegeninduktivitäten. Wir nennen diese variablen Induktivitäten Variometer. Diese Gleichung

ist übrigens nur bei kurzen drehbaren Spulen und kleinen Winkeln einigermaßen genau.

6. Mit einem kreisförmigen Leiter mit dem Radius a liegt ein unendlich langer gerader Leiter in der gleichen Ebene in einer Entfernung $b > a$ vom Kreismittelpunkt (Abb. 74). Es ist die Gegeninduktivität zu bestimmen. Grundsätzlich wäre es gleichgültig, ob man den Kraftfluß bestimmen würde, der

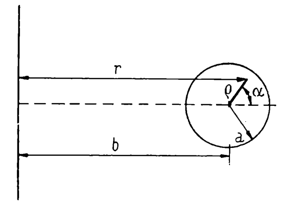


Abb. 74. Berechnung des Gegeninduktionskoeffizienten eines geraden Leiters und eines Kreisleiters

vom Strom des geraden Leiters im Kreisleiter erzeugt wird, oder den Kraftfluß, der, durch den Strom im kreisförmigen Leiter erzeugt, den geraden Leiter umschließt. Der erste Fall ist aber viel leichter zu berechnen. Die äußere Feldstärke, die vom Strom des geraden Leiters hervorgerufen wird, beträgt

$$H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{b + \varrho \cos \alpha}.$$

Den kreisförmigen Leiter durchfließt dann der Fluß

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\varrho \, d\alpha \, d\varrho}{b + \varrho \cos \alpha} = \mu_0 I \int_0^a \frac{\varrho}{\sqrt{b^2 - \varrho^2}} \, d\varrho$$

$$= \mu_0 I (b - \sqrt{b^2 - a^2}),$$

und für die Gegeninduktivität erhält man

$$M = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 (b - \sqrt{b^2 - a^2}).$$

Die gegenseitige Induktion ist demnach um so größer, je näher die Leiter beieinander liegen; wenn die Gerade den Kreis gerade berührt, ist $b = a$ und damit der Maximalwert von M

$$M_{\max} = \mu_0 a.$$

7. Der Fluß eines Toroids mit quadratischem Querschnitt und dem Halbmesser a (Abb. 69) ist nach Gl. (2.8.5)

$$\Phi = \frac{\mu_0}{2\pi} NIm \ln \frac{a + \frac{v}{2}}{a - \frac{v}{2}}.$$

Damit wird die Induktivität

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 m \ln \frac{a + \frac{v}{2}}{a - \frac{v}{2}}.$$

Wenn $a \gg \frac{v}{2}$ ist, erhält man durch Reihenentwicklung

$$\ln \frac{a + \frac{v}{2}}{a - \frac{v}{2}} = \ln \frac{1 + \frac{v}{2a}}{1 - \frac{v}{2a}} \approx \ln \left[\left(1 + \frac{v}{2a}\right)\left(1 + \frac{v}{2a}\right) \right]$$

$$= 2 \ln \left(1 + \frac{v}{2a}\right) \approx 2 \frac{v}{2a} = \frac{v}{a}$$

und für die Induktivität

$$L \approx \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} \frac{mv}{a} = \mu_0 N^2 \frac{A}{l},$$

wobei A den Querschnitt und l die Länge des mittleren Windungsumfanges bedeuten.

Werden einzelne Spulen mit den Windungszahlen N_1 und N_2 auf diesen Ring gewickelt, so beträgt ihre Gegeninduktivität

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} N_1 N_2 m \ln \frac{a + \frac{v}{2}}{a - \frac{v}{2}}$$

und, wenn $a \gg v/2$ ist, auf Grund der obigen Näherung

$$M \approx \mu_0 N_1 N_2 \frac{A}{l}.$$

8. Der Kraftfluß eines Toroids mit dem Halbmesser a und einem Kreisquerschnitt vom Halbmesser r_0 (Abb. 70) ist nach Gl. (2.8.6)

$$\Phi = \mu_0 N I (a - \sqrt{a^2 - r_0^2}).$$

Damit wird seine Induktivität

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \mu_0 N^2 (a - \sqrt{a^2 - r_0^2}).$$

Wenn $a \gg r_0$ ist, erhalten wir durch Reihenentwicklung der Wurzel:

$$\sqrt{a^2 - r_0^2} \approx a - \frac{r_0^2}{2a},$$

für L die gleiche Näherung wie beim Toroid mit quadratischem Querschnitt:

$$L \approx \mu_0 N^2 \frac{r_0^2}{2a} = \mu_0 N^2 \frac{A}{2a\,\pi} = \mu_0 N^2 \frac{A}{l}.$$

Die Gegeninduktivität zweier Teilspulen des Toroids mit den Windungszahlen N_1 und N_2 ist

$$M = \mu_0 N_1 N_2 [a - \sqrt{a^2 - r_0^2}]$$

oder, wenn $a \gg r_0$ ist,

$$M \approx \mu_0 N_1 N_2 \frac{A}{l}.$$

9. Es muß ausdrücklich betont werden, daß unsere bisherigen Definitionen der Selbst- bzw. Gegeninduktivität nur dann einen Sinn haben, wenn es sich um lineare Leiter handelt. Bei räumlichen Strömungen sind diese Begriffe nur mit Vorsicht anwendbar. Obgleich z.B. die Gleichung (2.8.2) den magnetischen Gesamtfluß richtig wiedergibt, liefert die Gleichung $L = \Phi/I$ einen falschen Wert für die Selbstinduktivität. Das richtige Ergebnis

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{r_i}{r_0} + \frac{1}{4} + \frac{r_a^4}{(r_a^2 - r_i^2)^2}\ln\frac{r_a}{r_i} - \frac{3r_a^2 - r_i^2}{4(r_a^2 - r_i^2)}\right)$$

erhält man z. B. mit Hilfe der Energiegleichung.

10. Wenn zwei nahezu gleiche Spulen mit gegenläufigem Wicklungssinn gleichachsig ineinander gewickelt und dann in Reihe geschaltet werden

(Abb. 75), wird das resultierende magnetische Feld sehr klein, da es sich praktisch auf das Gebiet zwischen beiden Spulen beschränkt. Damit wird auch die resultierende Induktivität der zwei Spulen sehr klein. Diese Wirkung wird

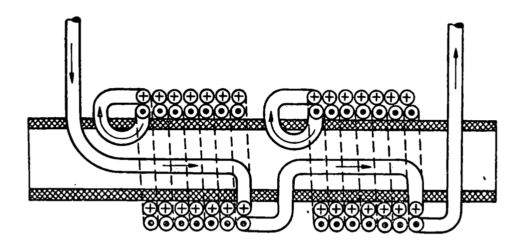


Abb. 75. Windungsanordnung eines Präzisionswiderstandes zur Verminderung des Induktionskoeffizienten (nach PALM)

hauptsächlich bei der Anfertigung von Präzisionswiderständen verwendet, wo es auf eine möglichst kleine Induktivität ankommt.

Zum Schutz gegen induzierende Wirkungen äußerer Felder werden Leitungen verdrillt. In diesem Fall sind die induzierten Spannungen in den einzelnen Schleifen einander entgegengesetzt und heben sich somit auf.

2.10. Die Grundgesetze des stationären magnetischen Feldes

Das Durchflutungsgesetz ist das Fundament für die praktische Berechnung des magnetischen Feldes. Gleichzeitig besitzt es aber auch eine große prinzipielle Bedeutung, weil es zwischen dem Strom und dem von ihm erzeugten magnetischen Feld einen direkten Zusammenhang vermittelt, von dem aus alle weiteren Beziehungen hergeleitet werden können. An dieser Stelle soll erwähnt werden – den mathematischen Beweis dafür müssen wir hier schuldig bleiben –, daß aus dem Durchflutungsgesetz auch das Gesetz von BIOT-SAVART eindeutig hervorgeht, falls die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes berücksichtigt wird.

Das Durchflutungsgesetz konnte in 2.6. in der Form geschrieben werden

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \int \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A}. \tag{2.10.1}$$

Es wurde dabei unter Berufung auf experimentelle Ergebnisse behauptet, daß diese Beziehung für einen beliebigen Kurvenverlauf und für eine beliebige davon berandete Fläche gilt. Die linke Seite der Gleichung kann mit Hilfe des STOKESschen Satzes umgeschrieben werden. Nach dem STOKESschen Satz ist bekanntlich das Linienintegral eines Vektors über eine geschlossene Kurve

gleich dem Flächenintegral der Rotation dieses Vektors, das über die von der geschlossenen Kurve berandete Fläche erstreckt wird. Es gilt deshalb

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \int \operatorname{rot} \mathfrak{H}\, d\mathfrak{A},$$

und das Durchflutungsgesetz kann also geschrieben werden

$$\int \operatorname{rot} \mathfrak{H}\, d\mathfrak{A} = \int \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A}.$$

Da diese Beziehung für eine beliebige Kurve und die dazu gehörende Fläche gilt, müssen die Integranden selbst gleich sein:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G}. \tag{2.10.2}$$

Das Durchflutungsgesetz besagt also in seiner Differentialform, daß die Rotation des magnetischen Feldes gleich der Stromdichte ist.

Die Integralform des Durchflutungsgesetzes ist für praktische Berechnungen meist besser geeignet als die Differentialform. Bei komplizierten Berechnungen ist es aber oft zweckmäßiger, von der Differentialform auszugehen.

Um das magnetische Feld aus der Differentialdarstellung des Durchflutungsgesetzes berechnen zu können, muß man neben der Rotation des Vektorfeldes bekanntlich auch seine Divergenz kennen. Im materielosen Raum sind alle magnetischen Kraftlinien geschlossen. Dies kann – zumindest prinzipiell – dadurch nachgewiesen werden, daß man den Verlauf der $\mathfrak{H}$-Linien in den verschiedensten Feldern experimentell untersucht. Diesen Sachverhalt drückt die zweite Grundgleichung des magnetischen Feldes aus:

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \tag{2.10.3}$$

Wird diese Gleichung mit der Permeabilität des Vakuums multipliziert, so ist sie auch für das Induktionsfeld gültig:

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0. \tag{2.10.4}$$

Bei magnetischen Stoffen gilt unsere Behauptung nur in der Form $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$. Im allgemeinen Fall besitzen also die magnetischen Induktionslinien weder einen Anfangs- noch einen Endpunkt, d. h., es gibt keine echten magnetischen Ladungen, während der Vektor der magnetischen Feldstärke, d. h. $\mathfrak{H}$, in Gegenwart von Stoffen auch Wirbel, das sind die Ströme, und Quellen, das sind die scheinbaren „magnetischen Ladungen", besitzt. Mit diesen Tatsachen werden wir uns später befassen.

Später werden wir noch Verfahren kennenlernen, mit deren Hilfe die Grundgleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$

wenn auch nicht in Differentialform, experimentell einfacher zu beweisen sind, als bisher vermutet werden kann.

Beispiele und Ergänzungen

1. Bisher wurde stets gesagt, daß die Induktionslinien immer geschlossen sind. Wir sind jetzt in der Lage, diesen Satz etwas genauer auszusprechen. Die Induktionslinien können nicht von einem im endlichen Raum liegenden Punkt entspringen bzw. dort enden. Sie sind also entweder geschlossen oder aber entspringen und enden im Unendlichen. Schließlich existiert noch ein dritter

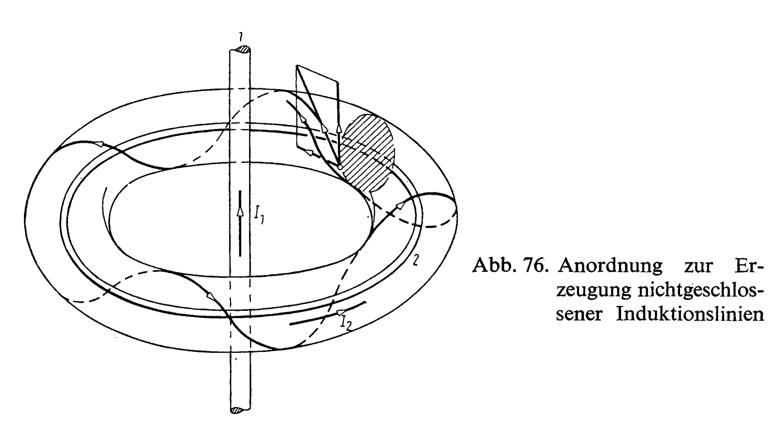


Abb. 76. Anordnung zur Erzeugung nichtgeschlossener Induktionslinien

Fall. Die Induktionslinie befindet sich gänzlich im Endlichen und besitzt, obwohl sie nicht geschlossen ist, doch nirgends eine Quelle oder Senke. Diese etwas ungewöhnliche Kraftlinienanordnung kann durch verhältnismäßig einfache Stromkreise hervorgerufen werden. Gemäß Abb. 76 wird um einen unendlich langen geraden Leiter 1, in dem ein Strom I_1 fließt, ein kreisförmiger Leiter gelegt, der vom Strom I_2 durchflossen wird. Wird um die Leitung 2 ein Toroid gezeichnet, durch dessen Schnitte mit der durch Leiter 1 gehenden Ebene die Induktionslinien des Stromes I_2 geliefert werden, so wird in sämtlichen Punkten dieser Fläche auch das durch den Strom I_1 erzeugte Feld $\mathfrak{B}_1$ tangential sein. Mithin fällt auch das resultierende Feld $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$ überall in die Berührungsebene. Dementsprechend verbleibt auch eine aus einem Flächenpunkt austretende Induktionslinie auf der Fläche. Die Induktionslinien sind

Schraubenlinien. Wird eine Induktionslinie beliebig verlängert, so wird sie sich nur bei ganz bestimmten Werten von I_1 und I_2 schließen. Die Induktionslinie belegt die Fläche im allgemeinen gleichmäßig dicht.

Man sollte annehmen, daß solche Verteilungen von Induktionslinien hier nur zur Erhellung des theoretischen Zusammenhangs dienen. In letzter Zeit haben sie aber auch eine praktische Bedeutung erlangt. Felder ähnlicher Konfiguration können als „magnetische" Wände für die Teilchen eines vollständig

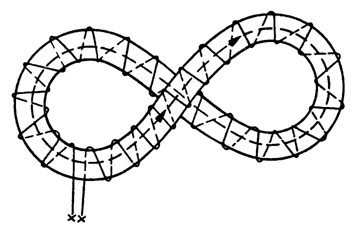


Abb. 77. Anordnung zur Herstellung einer magnetischen Wand als „Behälter" für ein Plasma von 10^8 °K

ionisierten Gases, des sogenannten Plasmas, dienen. Abb. 77 zeigt einen Torus von der Form einer 8. Eine Induktionslinie beschreibt hier eine ebenfalls 8förmige geschlossene Fläche. Es kann gezeigt werden, daß die geladenen Teilchen eines Plasmas diese Fläche nur mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit überschreiten können. Sie ist also ein „Behälter" für das hochtemperierte Plasma. Diese Anordnung erlangte in letzter Zeit durch die Verwendung bei Kernfusionsapparaten besondere praktische Bedeutung.

2. Bei der Untersuchung des magnetischen Feldes gingen wir vom BIOT-SAVARTschen Gesetz aus, das unmittelbar der Erfahrung entnommen wurde. Wir erwähnten auch, daß aus dem BIOT-SAVARTschen Gesetz das Durchflutungsgesetz abgeleitet werden kann, beschränkten uns aber auf einfache Sonderfälle und nahmen eigentlich das Durchflutungsgesetz ebenfalls als unabhängiges, empirisch gesichertes Gesetz an.

Jetzt soll etwas strenger, jedoch in aller Kürze untersucht werden, welche Grundgleichungen logisch gleichwertig sind. Wir beschränken uns dabei auf das Vakuum.

Wir bestätigen zunächst, daß aus den Grundgleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$$

das BIOT-SAVARTsche Gesetz ableitbar ist. Aus der Vektoranalysis wissen wir, daß ein quellenfreier Vektor stets durch die Rotation eines Vektorpotentials dargestellt werden kann:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}.$$

$\mathfrak{A}$ wird dabei durch die Rotation von $\mathfrak{H}$ bestimmt entsprechend der Gleichung

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\operatorname{rot}\mathfrak{H}}{r}\,dV = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathfrak{G}}{r}\,dV.$$

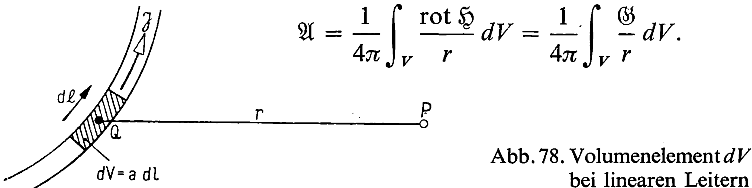


Abb. 78. Volumenelement dV bei linearen Leitern

Dieser Ausdruck geht für lineare Leiter (Abb. 78) in die Form

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathfrak{G}}{r}\,dV = \frac{1}{4\pi}\oint_L \frac{\mathfrak{G}}{r}\,a\,d\mathfrak{l} = \frac{I}{4\pi}\oint_L \frac{d\mathfrak{l}}{r}$$

über, aus der bereits $\mathfrak{H}$ unmittelbar berechnet werden kann:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot}_P \mathfrak{A} = \operatorname{rot}_P \frac{I}{4\pi}\oint_L \frac{d\mathfrak{l}_Q}{r} = \frac{I}{4\pi}\oint_L \operatorname{rot}_P \frac{d\mathfrak{l}_Q}{r}.$$

Durch die Indizes P und Q haben wir angedeutet, daß die Integration bzw. Rotationsbildung nach den Koordinaten von P oder Q vorzunehmen ist. Wegen

$$\operatorname{rot}_P \frac{d\mathfrak{l}_Q}{r} = \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \times d\mathfrak{l}_Q + \frac{1}{r}\operatorname{rot}_P d\mathfrak{l}_Q$$

$$= \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \times d\mathfrak{l}_Q + 0 = -\frac{\mathfrak{r}_0}{r^2} \times d\mathfrak{l}_Q$$

folgt

$$\mathfrak{H} = \frac{I}{4\pi}\oint_L \frac{d\mathfrak{l} \times \mathfrak{r}_0}{r^2},$$

und dies ist gerade das Biot-Savartsche Gesetz.

Nehmen wir jetzt das Biot-Savartsche Gesetz als gültig an und beweisen – wenigstens für Stromkreise – die Gültigkeit des Durchflutungsgesetzes

$$\oint_S \mathfrak{H}\,d\mathfrak{s} = I.$$

Setzen wir in die linke Seite dieser Gleichung den Wert von $\mathfrak{H}$ nach dem Biot-Savartschen Gesetz ein, so erhalten wir

$$\oint_S \mathfrak{H}\,d\mathfrak{s} = \oint_S \left[\frac{I}{4\pi}\oint_L \frac{d\mathfrak{l} \times \mathfrak{r}_0}{r^2}\right] d\mathfrak{s}.$$

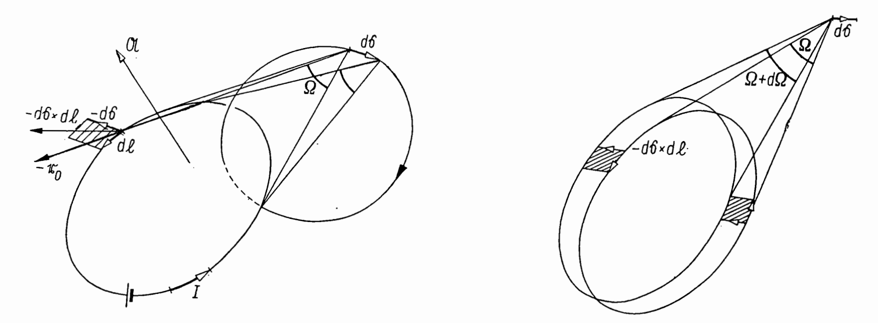


Abb. 79a. Zur Berechnung der Änderung des Raumwinkels eines Stromkreises bei einer Verschiebung des Aufpunktes P um $d\mathfrak{s}$

Abb. 79b. Änderung des Raumwinkels längs einer geschlossenen, mit dem Stromkreis verketteten Linie

Wie die Umformungen

$$\frac{d\mathfrak{l} \times \mathfrak{r}_0}{r^2} d\mathfrak{s} = \frac{(d\mathfrak{s} \times d\mathfrak{l})\,\mathfrak{r}_0}{r^2} = \frac{(-d\mathfrak{s} \times d\mathfrak{l})\,(-\mathfrak{r}_0)}{r^2}$$

zeigen, stellt dieser Ausdruck den Raumwinkel der Fläche $d\mathfrak{s} \times d\mathfrak{l}$ dar. So ergibt der Ausdruck

$$d\Omega = \oint_L \frac{(d\mathfrak{s} \times d\mathfrak{l})\,\mathfrak{r}_0}{r^2}$$

mit $d\mathfrak{s} = \text{const}$ die Änderung des Raumwinkels des geschlossenen Stromkreises bei einer Verschiebung des Aufpunktes P um $d\mathfrak{s}$. Integriert man weiter über die geschlossene Kurve S, so ergibt sich nach Abbildung 79 der Wert 4π. Es gilt also

$$\oint_S \oint_L \frac{d\mathfrak{l} \times \mathfrak{r}_0}{r^2} d\mathfrak{s} = 4\pi \qquad \text{und damit} \qquad \oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = I,$$

d. h. das Durchflutungsgesetz. Für mehrere Stromkreise ergibt sich die Richtigkeit des Durchflutungsgesetzes aus dem Überlagerungsprinzip.

Um die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes zu beweisen, untersuchen wir das folgende Flächenintegral:

$$\oint_A \mathfrak{H}\, d\mathfrak{A} = \frac{I}{4\pi} \oint_A \left[\oint_L \frac{d\mathfrak{l} \times \mathfrak{r}_0}{r^2}\right] d\mathfrak{A}.$$

Mit Hilfe des GAUSSschen Satzes erhalten wir

$$\oint_A \mathfrak{H}\, d\mathfrak{A} = \frac{I}{4\pi} \int_V \left[\operatorname{div}_P \oint_L \frac{d\mathfrak{l}_Q \times \mathfrak{r}_0}{r^2}\right] dV = \frac{I}{4\pi} \int_V \left[\oint_L \operatorname{div}_P \frac{d\mathfrak{l}_Q \times \mathfrak{r}_0}{r^2}\right] dV.$$

Es gilt aber

$$\operatorname{div}_P \frac{d\mathfrak{l}_Q \times \mathfrak{r}_0}{r^2} = d\mathfrak{l}_Q \operatorname{rot} \frac{\mathfrak{r}_0}{r^2}.$$

Da das Feld $\mathfrak{r}_0/r^2$ überall wirbelfrei ist, folgt

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{A} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0.$$

Wir haben also die folgende logische Äquivalenz für Stromkreise und für das Vakuum bewiesen:

$$\mathfrak{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\mathfrak{l} \times \mathfrak{r}_0}{r^2} \rightleftharpoons \begin{cases} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G}, \\ \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \end{cases}$$

3. Elektrische Ladung — Elektrisches Feld

3.1. Die Messung der elektrischen Ladung

Ein elektrischer Strom entsteht durch die gerichtete Bewegung diskreter Mengen der elektrischen Ladung, z. B. in Metallen durch die Bewegung von Elektronen. Wird eine Stromquelle, wie in Abb. 80 skizziert, an große Metallelektroden angeschlossen, so fließt ein Strom von Elektronen zu der gegen

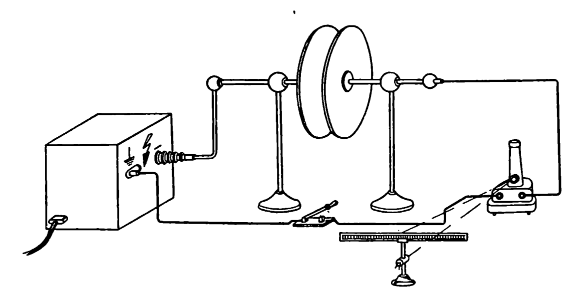


Abb. 80. Messung der elektrischen Ladung

Erde isolierten Elektrode. Diese Elektrode erhält dabei eine ganz bestimmte Ladung, deren Größe auf Grund der bisherigen Ausführungen ermittelt werden kann, indem die Zeit der Aufladung und die Stromstärke – sofern sie keine Funktion der Zeit ist – gemessen werden. Das Produkt beider Größen bestimmt dann die durch den Querschnitt transportierte und damit die auf der Elektrode vorhandene Ladung:

$$Q = It.$$

Die Ladung wird in As gemessen. Die Einheit As wird auch Coulomb (C) genannt.

Fließt in einer Leitung ein Strom von 1 A, so wird durch ihren Querschnitt während der Zeiteinheit eine Ladung von 1 C transportiert.

Ist die Stromstärke während der Aufladezeit nicht konstant, so erhält man die Gesamtladung als Summe aller Ladungselemente $I(t)\,dt$ durch die allgemeingültige Beziehung

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I\,dt.$$

Die Integration ist über die Gesamtzeit der Aufladung zu erstrecken.

Zur Messung der Ladung werden also eine Uhr und ein Strommeßgerät benötigt. Dies genügt häufig selbst in der Praxis. Ändert sich aber die Stromstärke während der Aufladung sehr schnell, dann können Stromstärke und Zeit nicht mehr mit getrennten Geräten gemessen werden. Es ist dann ein Meßinstrument erforderlich, dessen Anzeige der Ladung $\int_{t_1}^{t_2} I\,dt$ proportional ist. Diese Eigenschaft hat das ballistische Galvanometer, das ist ein Galvanometer mit großer Schwingungsdauer (Abb. 81a). Wird ein Stromimpuls durch

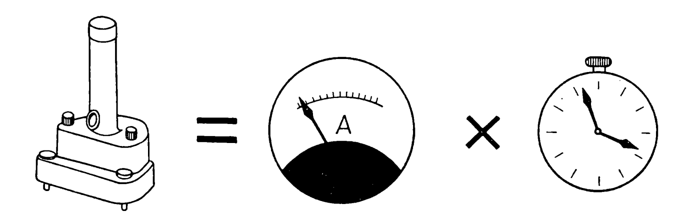


Abb. 81a. Das ballistische Galvanometer ersetzt einen Strommesser und eine Uhr

die Spule eines Galvanometers geschickt, dessen Schwingungszeit im Vergleich zur Zeitdauer des gesamten Stromimpulses groß ist, kann die Bewegung der Spule aus der Wirkung des sich sehr schnell ändernden Stromes berechnet werden: Die Bewegungsgleichung der Spule kann in der Form geschrieben werden

$$D = \theta \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

worin D das auf die Spule wirkende Drehmoment, θ das Spulenträgheitsmoment und $\ddot{\alpha}$ die Winkelbeschleunigung sind. Das Drehmoment der Spule wird durch das vom Strom erzeugte Drehmoment, die Reibung sowie das Rückstellmoment der Feder bestimmt. Ein sehr kurzer Stromimpuls erteilt zwar der Spule einen Impuls, wegen des Trägheitsmomentes wird sich die Spule aber unmittelbar nach dem Impuls noch in der Umgebung der Nullstelle befinden. Bis zu diesem Zeitpunkt kann also das Rückstellmoment der Feder vernachlässigt werden; die Reibung sei bei unseren überschlägigen Berechnungen von vornherein vernachlässigt. Somit kann die Bewegungsgleichung wie folgt geschrieben werden:

$$A \cdot B \cdot I(t) = \theta \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

wobei A die effektive Fläche der Spule und B die Luftspaltinduktion bedeuten. Integriert man beide Seiten dieser Gleichung über die Dauer des Impulses,

so folgt

$$A \cdot B \int_0^\tau I\,dt = \int_0^\tau \theta \frac{d^2\alpha}{dt^2}\,dt.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht eine Größe, die der durch das Galvanometer hindurchgegangenen Gesamtladung proportional ist. Die rechte Seite läßt sich unter Berücksichtigung von $d\alpha/dt = \dot{\alpha}$ in folgende Form überführen:

$$\int_0^\tau \theta \frac{d\dot{\alpha}}{dt}\,dt = \int_0^{\dot{\alpha}_\tau} \theta\,d\dot{\alpha} = \theta\dot{\alpha}_\tau.$$

Zu Beginn des Stromimpulses ($t = 0$) ist die Winkelgeschwindigkeit der Spule $\omega = 0$, am Ende des Impulses ($t = \tau$) soll sie $\omega = \dot{\alpha}_\tau$ sein. Die Spule wird danach nur noch durch die Federkraft beeinflußt. Sie wird bis zum Winkel α_{max} ausschlagen, bei dem die in der Feder aufgespeicherte potentielle Energie genausogroß ist wie die kinetische Energie im Zeitpunkt $t = \tau$. Diese kinetische Energie beträgt

$$\tfrac{1}{2}\theta\dot{\alpha}_\tau^2.$$

Die potentielle Energie der Spule beträgt beim Ausschlag α

$$\tfrac{1}{2}D_r\alpha^2,$$

wenn D_r die Federkonstante ist. Wir haben also die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}D_r\alpha_{\text{max}}^2 = \tfrac{1}{2}\theta\dot{\alpha}_\tau^2$$

und erhalten daraus

$$\dot{\alpha}_\tau = \sqrt{\frac{D_r}{\theta}} \cdot \alpha_{\text{max}}.$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung

$$A \cdot B \cdot \int_0^\tau I\,dt = A \cdot B \cdot Q = \theta\dot{\alpha}_\tau$$

ein, so erhalten wir

$$A \cdot B \cdot Q = \theta \sqrt{\frac{D_r}{\theta}}\,\alpha_{\text{max}}$$

und

$$Q = \frac{\theta}{A \cdot B}\sqrt{\frac{D_r}{\theta}}\,\alpha_{\text{max}} = k \cdot \alpha_{\text{max}}.$$

Der erste Maximalausschlag des Galvanometers ist also der elektrischen Ladung, die durch das Galvanometer hindurchgegangen ist, proportional (Abb. 81b).

Die von der Elektrode in Abb. 80 nach Kurzschließen des Schalters aufgenommene Ladung kann also mit Hilfe des ballistischen Galvanometers, das in den Stromkreis eingeschaltet ist, gemessen werden. Der Lichtzeiger weicht

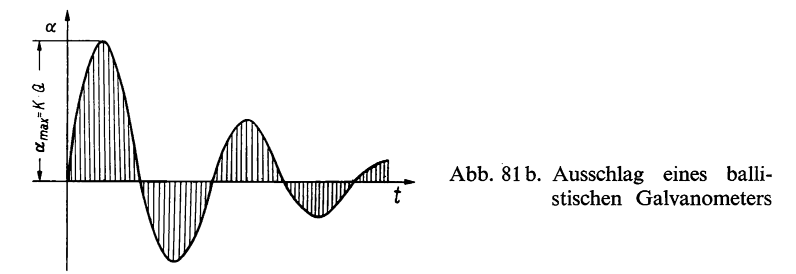


Abb. 81b. Ausschlag eines ballistischen Galvanometers

unter dem Einfluß der schnell durchfließenden Ladung bis zu einem Höchstwert aus und vollführt anschließend einige gedämpfte Schwingungen. Es ist nur der Maximalausschlag abzulesen. Ist auf Grund einer Eichmessung die Konstante k bekannt, so ergibt sich aus dieser Ablesung die Ladung der Elektrode.

Nachdem die Ladung auf einem beliebigen Körper gemessen werden kann, kann nun auch die gegenseitige Wirkung der Ladungen und das durch die Ladung hervorgerufene elektrostatische Feld untersucht werden. Bringt man in die Nähe eines elektrisch geladenen Körpers verschiedene Gegenstände, z. B. Papierstückchen, Holundermarkkügelchen oder auch einen anderen geladenen Körper, so kann man an diesen Kraftwirkungen wahrnehmen.

Die elektrische Ladung hat zwar eine atomare Struktur, wegen der sehr großen Zahl der Einzelladungen ist es bei der makroskopischen Behandlung der elektrischen Erscheinungen jedoch zweckmäßig, eine stetig verteilte Raum- oder Flächenladung anzunehmen. Die Verteilung der Raum- oder Flächenladung wird durch die Ladungsdichte gekennzeichnet. Zu diesem Zweck wählen wir ein beliebiges Volumenelement dV mit einer in diesem anzutreffenden Gesamtladung dQ aus. Dann versteht man unter der *Raumladungsdichte* ϱ in einem Punkt des Raumes die auf das um den Punkt angenommene Volumenelement dV bezogene Ladungsmenge dQ:

$$\varrho = \lim \frac{dQ}{dV}.$$

Die Einheit der Raumladungsdichte ist C/m^3. Bei der Bildung des Grenzwertes muß man allerdings vorsichtig sein. Das Volumenelement dV kann nicht be-

liebig klein gemacht werden, weil die Raumladung die Summe der Einzelladungen ist. Deshalb wird in einem beliebigen Raumpunkt beim Grenzübergang zum beliebig kleinen Volumenelement entweder die Ladungsdichte Null oder eine unendlich große Ladungsdichte vorgefunden, je nachdem, ob der Punkt mit der Stelle einer Einzelladung zusammenfällt oder nicht. Die Volumenelemente dV müssen also „makroskopische Differentiale" sein, die einerseits so klein sind, daß die Ladungsdichten in verschiedenen Punkten des Raumelementes nicht wesentlich verschieden sind, andererseits müssen sie so groß sein, daß sie noch immer sehr viele punktförmige Einzelladungen enthalten.

Kennt man in einem beliebigen Raumpunkt die Ladungsdichte ϱ, so ist die im umgebenden Volumenelement dV befindliche Ladung

$$dQ = \varrho \, dV.$$

Ist die Ladungsdichte für sämtliche Raumpunkte eines Volumens V gegeben, so erhält man die im ganzen Volumen befindliche Ladungsmenge

$$Q = \int \varrho \, dV.$$

Punktförmige Einzelladungen befinden sich oft dicht verteilt in einer dünnen Oberflächenschicht eines Körpers, die bei der mathematischen Behandlung durch eine Fläche ersetzt werden kann. Die *Flächenladungsdichte* ist dann

$$\sigma = \lim \frac{dQ}{dA},$$

ihre Maßeinheit ist $\mathrm{C/m^2}$.

Beträgt die Flächenladungsdichte in einem Punkt einer beliebigen Fläche σ, so befindet sich auf dem Flächenelement dA, von dem der Punkt umgeben wird, die Ladung

$$dQ = \sigma \, dA.$$

Ist die Flächenladungsdichte in allen Punkten einer Fläche A gegeben, erhält man die Gesamtladung der Fläche

$$Q = \int \sigma \, dA.$$

Die punktförmige Einzelladung oder einfach die Punktladung, wie sie bisher bereits besprochen wurde, wird auch weiterhin eine große Rolle spielen. Den Begriff „Punktladung" wollen wir jedoch etwas weiter fassen, indem wir jede

in einem Volumen oder auf einer Fläche kontinuierlich verteilte Ladung als Punktladung bezeichnen, wenn die größte Linearausdehnung des durch sie eingenommenen Raumes vernachlässigbar klein ist im Vergleich zum Beobachtungsabstand, in dem die Wirkung der Ladung untersucht wird. Es hängt also von der Natur der Aufgabe ab, ob eine Ladung als punktförmig angesehen werden kann, ebenso wie auch die Erde bei astronomischen Problemen oft als Massenpunkt behandelt wird, während in der Atomphysik oft ein einziges Atom nicht als Massenpunkt angesehen werden kann.

In Abb. 82 sind die Größen einiger Ladungen angegeben, denen man in der Umwelt begegnen kann. Der Wert der kleinsten, der Elementarladung, ist der des Elektrons:

$$|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}.$$

Abb. 82. Größenordnung einiger elektrischer Ladungen

Zum Sammeln einer Ladung von 1 C sind demnach

$$N = \frac{1}{|e|} = 6{,}25 \cdot 10^{18}$$

Elektronen erforderlich. Es ist verständlich, daß die elektrische Ladung wie der elektrische Strom in vielen Fällen als ein Kontinuum betrachtet werden kann. Die atomare Struktur zeigt sich erst bei sehr subtil ausgeführten Präzisionsmessungen oder, wie bereits erwähnt, in Schwankungserscheinungen.

3.2. Die elektrische Feldstärke

Im Raum befinde sich eine elektrische Ladung. Sie kann in einem kleinen Volumen konzentriert, d. h. punktförmig, aber auch im Raum und auf der Fläche kontinuierlich verteilt sein. In jedem Fall wird auf eine kleine Ladung irgendwo im Raum, auf die sogenannte Probeladung q, eine Kraft wirken.

Die Probeladung dient dann als Feldmeßgerät. Größe und Richtung der Kraft werden von Ort zu Ort verschieden sein. Je größer die Kraft in einem Punkt des Raumes ist, für desto stärker wird auch das elektrische Feld an dieser Stelle gehalten. Diese auf die Probeladung wirkende Kraft ist also ein Maß für die herrschende Feldstärke. Die Kraftwirkung wird auf die Einheitsladung bezogen, um bei der Feldstärkebestimmung von der Größe der Probeladung unabhängig zu sein.

In einem beliebigen Feldpunkt ist die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ definitionsgemäß gleich dem Verhältnis der Kraft $\mathfrak{F}$, die auf die in diesem Raumpunkt gebrachte Ladung q wirkt, zu dieser Ladung q:

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{F}}{q}. \tag{3.2.1}$$

Die elektrische Feldstärke ist also ein Vektor. Seine Richtung stimmt mit der auf eine positive Probeladung wirkenden Kraft überein, sein Betrag ist gleich dem Wert der Kraft, die auf die Einheitsladung wirkt (Abb. 83). In diesem Fall ist $q = 1$ und somit

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{F}|.$$

Abb. 83. Prinzipielle Messung der elektrischen Feldstärke

Es muß aber betont werden, daß die Feldstärke keine Kraft darstellt, sondern daß nur ihr Betrag gleich dem der Kraft ist, die auf die Einheitsladung wirkt. Wird die Kraft in Newton, die Ladung in Coulomb gemessen, so wird die Maßeinheit der Feldstärke

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}.$$

Es herrscht danach in einem Punkt die Feldstärke 1 N/C, wenn dort auf die Probeladung 1 C die Kraft 1 N wirkt. Wir führen als neue Feldstärkeeinheit

per definitionem die Maßeinheit Volt/Meter ein:

$$1\,\frac{\text{N}}{\text{C}} = 1\,\frac{\text{V}}{\text{m}}. \qquad (3.2.2)$$

Jetzt läßt sich auch die Kraft mit Hilfe elektrischer Größen ausdrücken, und zwar gilt

$$1\ \text{N} = 1\ \text{VC/m}.$$

Damit ist zwar die Dimension der Kraft eliminiert worden, das Kraftmeßgerät aber kann nur dann entbehrt werden, wenn zur Messung von Volt oder von Volt/Meter ein von der Kraftmessung unabhängiges Meßgerät zur Verfügung steht. Ein solches Gerät werden wir bald konstruieren können.

Die Definitionsgleichung der Feldstärke kann auch in der Form

$$\mathfrak{F} = q\mathfrak{E} \qquad (3.2.3)$$

geschrieben werden. Da die Feldstärke mit Hilfe eines Spannungsmessers sehr einfach gemessen werden kann, läßt sich die Kraft, die auf eine Ladung im Raum wirkt, mit Hilfe dieser Gleichung berechnen. Damit kann eine große Anzahl technischer Aufgaben gelöst werden, bei denen die Bewegungsgesetze elektrischer Ladungen im elektrischen Feld berechnet werden müssen (Abb. 84),

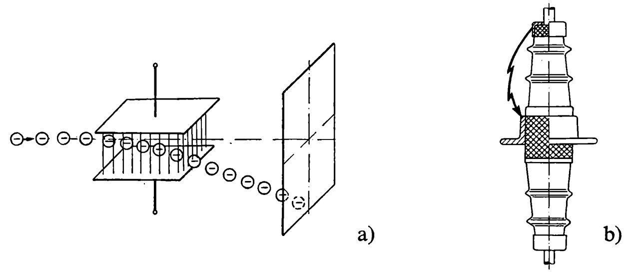


Abb. 84. Die Kenntnis der Feldstärke hat bei folgenden praktischen Problemen besondere Bedeutung:
a) bei der Untersuchung der Bewegung geladener Teilchen,
b) bei der Bestimmung der Durchschlagsfestigkeit

wie z. B. in der Kathodenstrahlröhre, im Elektronenmikroskop, im Massenspektrographen und in verschiedenen Beschleunigungseinrichtungen der Atomphysik. Andererseits muß man die Feldstärke auch bei allen Problemen der elektrischen Durchschlagsfestigkeit von Isolierstoffen kennen, weil oberhalb gewisser kritischer Feldstärkewerte die auf positive und negative Ladungen wirkenden Kräfte so groß werden können, daß die abgesättigten ungleichnamigen Ladungen getrennt werden und der Isolator dadurch zum Leiter wird.

In der Abb. 85 sind einige in der Praxis auftretende Feldstärken angegeben.

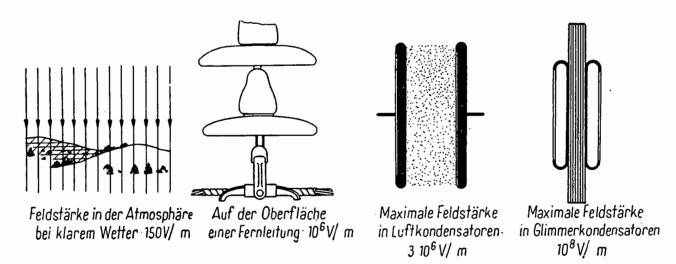


Abb. 85. Größenordnung einiger Feldstärken

3.3. Das COULOMBsche Gesetz

Da wir nun das von elektrischen Ladungen erzeugte Kraftfeld prinzipiell mit Hilfe einer Probeladung ausmessen können, fragen wir nach dem gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld und der erzeugenden Ladung. Diesen Zusammenhang stellt das COULOMBsche Gesetz her, mit dessen Hilfe die Feldstärke in einem Punkt des Raumes als Summe der Feldstärkeelemente berechnet werden kann, die von den in den Volumenelementen dV vorhandenen elementaren Ladungen $\varrho\ dV = dQ$ erzeugt werden (Abb. 86).

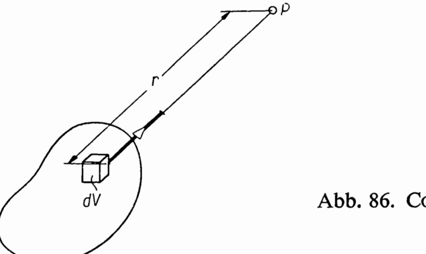


Abb. 86. COULOMBsches Gesetz

Durch ein Ladungselement dQ wird im Punkt P im Abstand r die Feldstärke

$$dE = k_e \frac{dQ}{r^2}$$

erzeugt. Das Feldstärkeelement ist also dem Ladungselement direkt und dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional. Seine Richtung ist bei positiver Ladung die gleiche wie die des Einheitsvektors, der vom Volumenelement dV zum Punkt P zeigt; bei negativer Ladung gilt der entgegengesetzte Richtungssinn. Damit gilt die Vektorgleichung

$$d\mathfrak{E} = k_e \frac{dQ}{r^2}\,\mathfrak{r}^0 .$$

Die Gesamtfeldstärke im Punkt P ergibt sich aus der Vektorsumme der elementaren Feldstärken

$$\mathfrak{E} = k_e \int_Q \frac{dQ}{r^2}\,\mathfrak{r}^0 = k_e \int_V \mathfrak{r}^0 \frac{\varrho}{r^2}\,dV. \tag{3.3.1}$$

Für den Proportionalitätsfaktor k_e schreibt man im allgemeinen

$$k_e = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \tag{3.3.2}$$

und nennt die Konstante ε_0 *Dielektrizitätskonstante des Vakuums.* Damit lautet die Differentialform des COULOMBschen Gesetzes

$$d\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\,\mathfrak{r}^0, \tag{3.3.3}$$

und die Feldstärke ist

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_Q \frac{dQ}{r^2}\,\mathfrak{r}^0 = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_V \frac{\varrho\,dV}{r^2}\,\mathfrak{r}^0. \tag{3.3.4}$$

Sowohl der Zahlenwert als auch die Maßeinheit von ε_0 lassen sich aus Gleichung (3.3.4) bestimmen, wenn in einem konkreten Fall die Feldstärke bei bekannter Ladungsverteilung in einem Raumpunkt gemessen wird. Man erhält

$$\varepsilon_0 = 8{,}856 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}.$$

Multipliziert man die Gleichungen (3.3.3) und (3.3.4) mit ε_0 und führt mit

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}$$

eine neue Feldgröße ein, so erhält man

$$d\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}\frac{dQ}{r^2}\,\mathfrak{r}^0$$

bzw.

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}\int_Q \frac{dQ}{r^2}\,\mathfrak{r}^0 = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\varrho\,dV}{r^2}\,\mathfrak{r}^0.$$

$\mathfrak{D}$ wird *dielektrischer Verschiebungsvektor* genannt. Seine Maßeinheit ist

$$[D] = [\varepsilon_0]\,[E] = \frac{\text{As}}{\text{m}^2}.$$

Der Verschiebungsvektor besitzt die gleiche Dimension wie die Flächenladungsdichte.

3.4. Berechnung einfacher Felder mit Hilfe des COULOMBschen Gesetzes

3.4.1. Das elektrische Feld einer Punktladung

Wir gehen von der Gleichung (3.3.4)

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_Q \frac{dQ}{r^2}\,\mathfrak{r}^0$$

aus. Ist die Ladung in einem kleinen Volumen konzentriert, so können r und $\mathfrak{r}^0$ für sämtliche Elemente dQ als identisch angenommen und daher vor das Integralzeichen gezogen werden. Damit wird die Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\mathfrak{r}^0}{r^2}\int_Q dQ = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\mathfrak{r}^0\,. \tag{3.4.1}$$

Man sieht, daß die von einer Punktladung Q erzeugte Feldstärke der Ladung direkt, dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional ist. Der Feldstärkevektor zeigt bei einer positiven Ladung von der Ladung weg, bei einer negativen Ladung auf sie zu. In Abb. 87 ist der Verlauf der Feldstärke

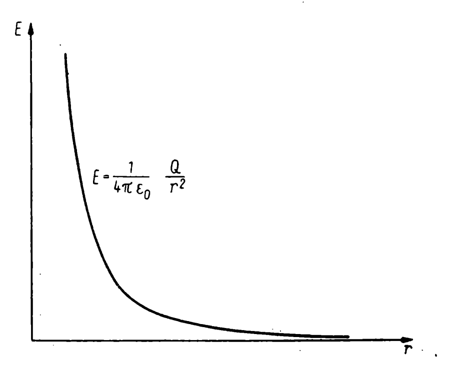


Abb. 87. Verlauf der Feldstärke in der Umgebung einer Punktladung

längs eines Fahrstrahles gezeichnet. Am Ort der Punktladung wird E unendlich groß, was in Wirklichkeit natürlich nicht möglich ist. Dieses falsche Ergebnis rührt davon her, daß der Begriff der physikalisch nicht existierenden Punktladung eingeführt wurde. Dieser Begriff ist allerdings nützlich und läßt sich anwenden, solange das Feld in Abständen, die zu den Abmessungen der Ladung relativ groß sind, untersucht wird.

Das elektrische Feld kann ebenso wie das magnetische Feld mit Hilfe von Kraftlinien veranschaulicht werden. Die Kraftlinien einer Punktladung können sehr leicht gezeichnet werden. Die Feldstärke ist nämlich in allen Punkten radial gerichtet. Werden also die aus der Punktladung austretenden Strahlen

gezeichnet, so liefern diese gleichzeitig die Kraftlinien, weil ihre Tangenten tatsächlich die Richtung der Feldstärke angeben (Abb. 88). Bei positiver Ladung gehen die Kraftlinien von der Ladung aus, bei negativer Ladung enden sie in der Ladung.

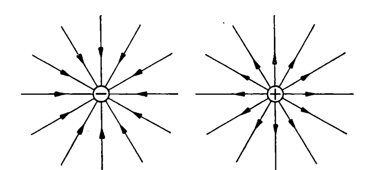


Abb. 88. Die Kraftlinien der Punktladung

Im Gegensatz zum magnetischen Feld, das sich als ein Wirbelfeld erwies, ist das elektrische Feld ein Quellenfeld. Von einer einzelnen positiven Punktladung sagt man, daß die Kraftlinien von ihr ausgehen und im Unendlichen enden.

Daß darüber hinaus die $1/r^2$-Abhängigkeit durch die Kraftlinien richtig wiedergegeben wird, geht aus der Abb. 88 hervor, nach der die Dichte der Kraftlinien dem Quadrat des Abstandes tatsächlich umgekehrt proportional ist, weil im doppelten Abstand von der Punktladung durch eine viermal so große Fläche ebenso viele Kraftlinien hindurchgehen; die Dichte verringert sich also auf ein Viertel ihrer ursprünglichen Größe.

Auf eine in den Abstand r von der Ladung Q gebrachte Probeladung q wirkt nach (3.2.1) und (3.4.1) die Kraft

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\mathfrak{r}^0 .$$

Gewöhnlich wird *diese* Gleichung als COULOMBsches Gesetz bezeichnet.

3.4.2. *Das Feld zweier Punktladungen*

Das Kraftfeld mehrerer Punktladungen wird mit Hilfe des Überlagerungssatzes bestimmt, der dem allgemeinen COULOMBschen Gesetz entnommen werden kann. Die Feldstärke, die durch eine beliebige Punktladung erzeugt wird, ist in einem beliebigen Raumpunkt in Gegenwart einer anderen Ladung genausogroß, als ob diese gar nicht vorhanden wäre. Dies besagt mit anderen Worten, daß in jedem beliebigen Raumpunkt durch jede einzelne Punktladung eine von den übrigen Ladungen unabhängige Feldstärke erzeugt wird. Demnach erhält man das Kraftfeld der im Abstand d voneinander befindlichen Ladungen $+Q$ und $-Q$ in einem beliebigen Raumpunkt, indem man die Feldstärken, die von den einzelnen Ladungen erzeugt werden, bestimmt und die Vektorsumme aus beiden bildet (Abb. 89). Die in Punkt (*1*) von

der Ladung $+Q$ verursachte Feldstärke möge $\mathfrak{E}_1^+$ sein. Sie zeigt von der Ladung $+Q$ fort. Die im selben Punkt von der Ladung $-Q$ verursachte Feldstärke sei $\mathfrak{E}_1^-$. Sie zeigt gegen die Ladung $-Q$. Die Absolutwerte der Teilfeldstärken wurden gemäß dem $1/r^2$-Abstandsgesetz eingezeichnet. Die resultierende Feldstärke im Punkt (*1*) ist die Vektorsumme $\mathfrak{E}_1^+ + \mathfrak{E}_1^- = \mathfrak{E}_1$.

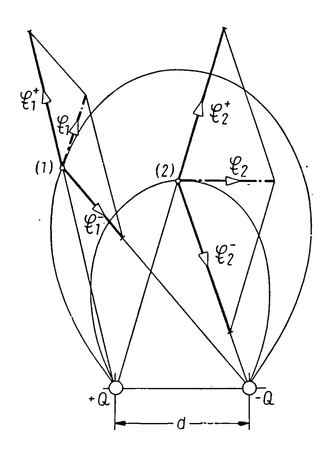


Abb. 89. Konstruktion des resultierenden Feldes zweier Punktladungen

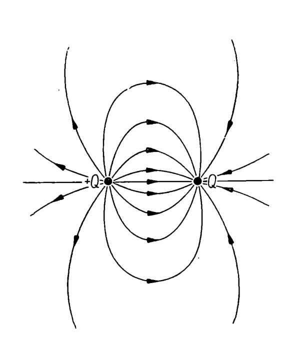


Abb. 90. Kraftfeld zweier Ladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen

Sind auf diese Weise die resultierenden Feldstärken in genügend vielen Punkten des Raumes ermittelt, können die Kraftlinien eingetragen werden. Man erhält dann das in Abb. 90 gezeichnete Kraftlinienbild. Das Kraftlinienbild zweier gleichgroßer positiver Ladungen ist in Abb. 91 gezeichnet. Sind die Ladungen verschieden groß, so wird das Kraftlinienbild unsymmetrisch (Abb. 92).

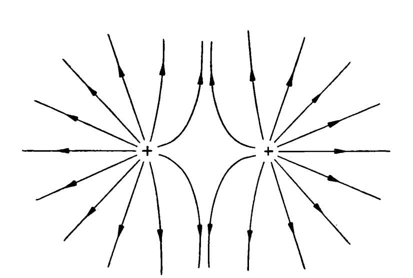


Abb. 91. Kraftfeld zweier Ladungen mit gleichem Vorzeichen

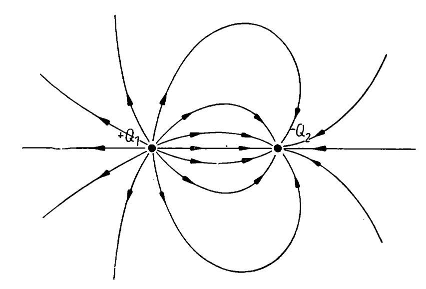


Abb. 92. Kraftfeld zweier verschieden großer Ladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen

In Abb. 90 treten die Kraftlinien aus der positiven Ladung aus und enden bei der negativen Ladung. In Abb. 91 treten sie aus den positiven Ladungen aus und enden im Unendlichen, und in Abb. 92 enden sie zum Teil auf der negativen Ladung, zum Teil im Unendlichen.

3.4.3. *Weitere Beispiele einfach berechenbarer Felder*

Prinzipiell kann die Feldstärke bei jeder gegebenen Ladungsverteilung berechnet werden. In der Praxis treten jedoch oft erhebliche rechentechnische Schwierigkeiten auf. Mitunter helfen dann Symmetrieüberlegungen.

Es soll z. B. angenommen werden, daß eine Kugel mit endlichem Radius eine homogen verteilte Raumladung besitzt (Abb. 93). Aus Symmetriegründen

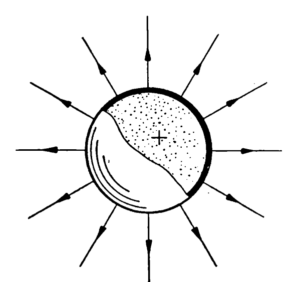


Abb. 93. Äußeres Feld einer geladenen Kugel

kann man vorwegnehmen, daß das Kraftfeld überall radial gerichtet ist. Dementsprechend wird das Feld außerhalb der Kugel genauso sein, als ob die gesamte Ladung im Mittelpunkt der Kugel konzentriert wäre. Das gleiche gilt, wenn die Ladung auf der Kugeloberfläche verteilt ist. Natürlich kann man über den Feldstärkeverlauf im Kugelinnern einstweilen nichts aussagen. Später wird aber auch dieser genau zu bestimmen sein, wenn wir über unsere Symmetrieüberlegungen hinaus weitere Ergebnisse kennengelernt haben.

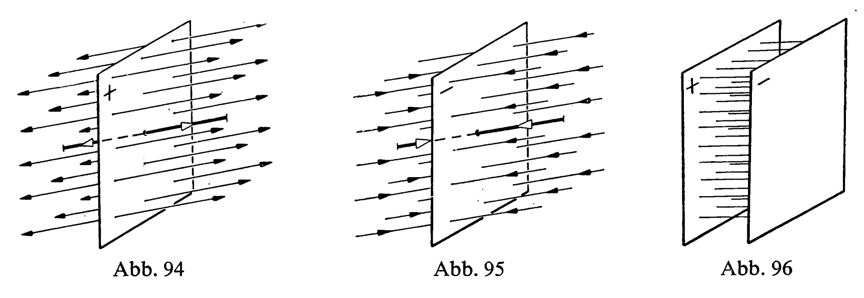


Abb. 94 Abb. 95 Abb. 96

Abb. 94. Homogenes Kraftfeld bei positiver Ladung
Abb. 95. Homogenes Kraftfeld bei negativer Ladung
Abb. 96. Feld zweier paralleler Flächen mit entgegengesetzten Ladungen

Das Kraftfeld einer ebenen, unendlich ausgedehnten Flächenladung kann gleichfalls leicht bestimmt werden. An welchen Punkt man auch immer die Probeladung bringt, eine positiv geladene Ebene wird diese stets in gleicher Weise abstoßen. Das Kraftfeld ist also homogen (Abb. 94). Seine Größe bleibt zunächst noch unbekannt. Im Falle einer negativen Ladung erhält man die in Abb. 95 gezeichnete Anordnung. Aus der Überlagerung beider Felder erhält man das Feld zweier entgegengesetzt geladener paralleler unendlicher Ebenen (Abb. 96). Zwischen den beiden Ebenen ist das Feld homogen, im Außenraum existiert kein Feld.

Beispiele und Ergänzungen

1. Die Flächenladungsdichte auf einer ebenen, unendlich ausgedehnten Metallplatte sei σ. Es soll die Feldstärke im Abstand z von der Metallfläche ermittelt werden (Abb. 97).

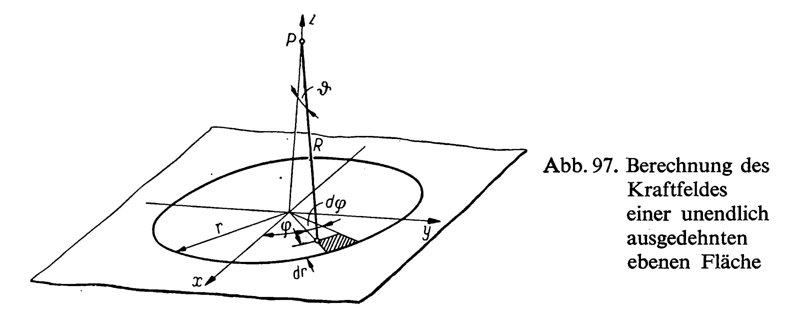


Abb. 97. Berechnung des Kraftfeldes einer unendlich ausgedehnten ebenen Fläche

Nach dem allgemeinen COULOMBschen Gesetz ist die Größe der Feldstärke, die von der Ladung $dQ = \sigma r\, dr\, d\varphi$ auf dem Flächenelement $dA = r\, dr\, d\varphi$ erzeugt wird,

$$dE = \frac{\sigma}{4\pi\,\varepsilon_0}\, r\, \frac{dr\, d\varphi}{R^2}.$$

Aus Symmetriegründen wird die Resultierende der Feldstärke nur eine Komponente in der z-Richtung haben. Diese ist für ein Feldstärkeelement

$$dE_z = \frac{\sigma}{4\pi\,\varepsilon_0}\, r\, \frac{dr\, d\varphi}{R^2} \cos\vartheta.$$

Damit wird

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\,\varepsilon_0} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r\cos\vartheta}{R^2}\, dr\, d\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{r\cos\vartheta}{R^2}\, dr.$$

Mit

$$r = z \cdot \tan \vartheta, \quad R = \frac{z}{\cos \vartheta}, \quad dr = \frac{z}{\cos^2 \vartheta}\, d\vartheta$$

erhält man

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Der Feldstärkewert hängt also nicht von der Lage des Punktes ab, sondern ist im ganzen Raum konstant.

3.5. Der Begriff der Potentialdifferenz oder Spannung

Das elektrostatische Kraftfeld läßt sich nicht durch die Feldstärke allein eindeutig kennzeichnen und beschreiben.

Wird im Feld die Probeladung q von einem beliebigen Punkt aus in verschiedene Richtungen um den gleichen Abstand fortbewegt, so sind hierbei verschieden große Arbeiten zu leisten. Wird z. B. eine positive Probeladung q in Richtung der Kraftlinien fortbewegt, so gewinnt man aus dem Kraftfeld eine Arbeit, die gleich dem Produkt aus Kraft und Weg ist. Die Kraft ist dabei gleich dem Produkt aus Ladung und Feldstärke. Wenn aber eine zu den Kraftlinien senkrechte Bewegung um den gleichen Abstand ausgeführt wird, so ist keine Arbeit zu leisten bzw. wird keine Arbeit gewonnen, weil die Kraft keine in Wegrichtung fallende Komponente besitzt. Falls aber die Bewegung gegen die Richtung der Kraftlinien erfolgt, haben wir gegen das Kraftfeld eine Arbeit zu leisten, oder es kann formell gesagt werden, daß das Kraftfeld eine negative Arbeit leistet. Besteht in einem Punkt eine große Feldstärke, so gewinnt man bei der Fortbewegung in Richtung der Kraftlinien längs eines gegebenen Weges eine große Arbeit. Bei kleinen Feldstärken ist auch die erhaltene Arbeit entsprechend klein.

Das Kraftfeld sei gemäß Abb. 98 homogen oder, falls es inhomogen ist, zumindest in kleinen Teilen homogen, so daß man es im betrachteten Gebiet als homogen ansehen kann. Dann ist die geleistete Arbeit bei der Verschiebung der Ladung q in Richtung der Kraftlinien längs der Strecke l

$$W_{AB} = l \cdot F = lqE.$$

Längs gleichlanger, aber anders gerichteter Wegstrecken ist

$$W_{AB'} = l' \cdot q \cdot E \cdot \cos \alpha = q\mathfrak{l}'\mathfrak{E},$$

weil nur die Kraftkomponente in Wegrichtung einen Beitrag liefert. Erfolgt die Bewegung senkrecht zu den Kraftlinien, so ist ganz allgemein keine Arbeit

zu leisten. Im allgemeinen Fall (Abb. 99) erhält man die geleistete Arbeit, indem man die Kurve AB in Abschnitte dl unterteilt, die beim Durchschreiten eines jeden Abschnittes geleistete Arbeit bestimmt und die so gewonnenen

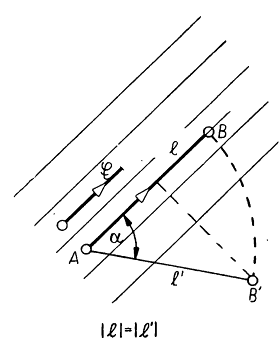


Abb. 98. Berechnung der durch das Kraftfeld geleisteten Arbeit

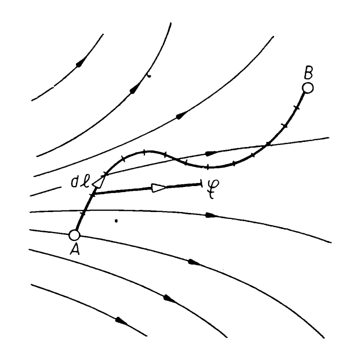


Abb. 99. Berechnung der Arbeit im allgemeinen Fall

Arbeiten summiert:

$$W_{AB} = \sum_A^B q\mathfrak{E}\, d\mathfrak{l}.$$

Bei genügend feiner Unterteilung gelangt man im Grenzübergang zur Gleichung

$$W_{AB} = q\int_A^B \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l}. \tag{3.5.1}$$

Es ist eine wesentliche Eigenschaft des elektrostatischen Kraftfeldes, daß diese Arbeit bei gegebenem Kraftfeld nur von der Lage der Anfangs- und Endpunkte abhängt und nicht vom Weg, auf dem man von einem Punkt zum anderen gelangt. Dies kann übrigens auch mit Hilfe des verallgemeinerten COULOMBschen Gesetzes bewiesen werden. Da die geleistete Arbeit nicht nur von der Größe des Kraftfeldes, sondern auch von der Größe der Probeladung abhängt, ist es zweckmäßig, diese Arbeit auf die Probeladungseinheit zu beziehen:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l}. \tag{3.5.2}$$

U_{AB} nennt man die *Potentialdifferenz* (oder *Spannung*) zwischen zwei Feldpunkten A und B.

Aus der Definitionsgleichung (3.5.2) gehen sowohl die Dimension als auch die Einheit der Potentialdifferenz hervor: Zwischen zwei Feldpunkten ist dann

eine Einheitsspannung vorhanden, wenn die Einheitsarbeit beim Transport einer Einheitsladung zu leisten ist. Diese Spannungseinheit ergibt sich aus dem Produkt

$$[U] = [E] \cdot [l] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{V}$$

als das Volt.

Die Spannung 1 V besteht also dann zwischen zwei Punkten, wenn gerade die Arbeit 1 Ws zu leisten ist, um die Ladung 1 C von dem einen Punkt zu dem anderen zu bringen.

Die Potentialdifferenz oder Spannung ist also keine Arbeit, sondern stimmt nur hinsichtlich ihres Zahlenwertes mit der Arbeit überein, die an der Einheitsladung geleistet wurde.

Vereinbart man einen festen Bezugspunkt, auf den man alle übrigen Punkte bei der Berechnung der Potentialdifferenz bezieht, dann kann man auch von einem Potential aller übrigen Punkte sprechen. Wir verstehen also unter dem Potential eines Punktes die Potentialdifferenz, die zwischen einem beliebigen Raumpunkt und dem festgelegten Bezugspunkt besteht. Der Bezugspunkt hat dabei natürlich das Potential Null. In der Praxis wird das Potential der Erde, bei theoretischen Berechnungen hingegen das Potential des unendlich fernen Punktes als Nullpotential gewählt.

Hat der Punkt P die Koordinaten x, y, z, dann ist sein Potential

$$U_P = U(x, y, z) = \int_P^O \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l}\,. \tag{3.5.3}$$

Dieser Wert hängt einzig und allein von dem Ort des Punktes P ab, da der Ort O festliegt.

Auf diese Weise kann allen Punkten des elektrischen Feldes ein Skalar zugeordnet werden, und zwar der Wert jener Arbeit, die durch das Kraftfeld geleistet wird, wenn man die positive Einheitsladung aus dem untersuchten Punkt in den Bezugspunkt bringt. Damit kann man das Kraftfeld zweckmäßiger kennzeichnen als durch die Angabe der Feldstärke.

Die Potentialdifferenz zweier Feldpunkte U_{AB} läßt sich aus den Potentialen in den Punkten A und B einfach berechnen. Aus der Abb. 100 entnimmt man

$$U_{AB} = \int_A^B \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = \int_A^0 \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} + \int_0^B \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = \int_A^0 \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} - \int_B^0 \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = U_A - U_B. \tag{3.5.4}$$

Das Produkt $\mathfrak{E}\, d\mathfrak{l}$ liefert einen positiven Wert, wenn die Richtungen von $\mathfrak{E}$ und $d\mathfrak{l}$ gleich sind, wenn man also, von Punkt A ausgehend, mit der Richtung

der Kraftlinie zum Punkt B gelangt. In diesem Fall muß auch die Differenz $U_A - U_B$ positiv, also U_A größer als U_B sein. Die Kraftlinien verlaufen also von Orten höheren Potentials zu Orten niederen Potentials.

Die Tatsache, daß die im elektrostatischen Kraftfeld an der Ladung geleistete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges, nicht aber vom Wege selbst abhängt, hat die Einführung des Potentials ermöglicht.

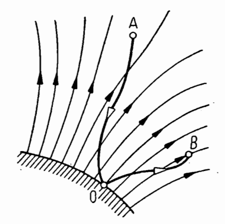


Abb. 100. Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten

Felder, in denen die Einführung des Potentials in dieser Weise möglich ist, nennt man *Potentialfelder*. Wird die Ladung in einem solchen Feld längs einer geschlossenen Strecke geführt, so wird die durch das Kraftfeld geleistete Arbeit stets gleich Null sein, d. h. $\oint \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = 0$.

In der Abb. 101 sind die Größenordnungen verschiedener Spannungen angegeben, die man in der Praxis antreffen kann. Die für den Menschen gefährliche Spannung beginnt bei 65 V.

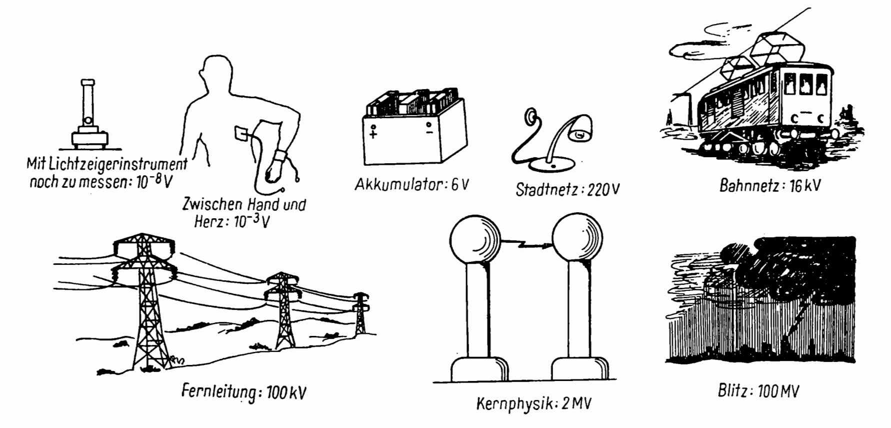


Abb. 101. Größenordnung einiger Spannungen

Die Einführung des Potentials bietet folgende Vorteile: a) Das Feld kann einfacher beschrieben werden. b) Nach einer Messung der Potentialdifferenz kann das Kraftfeld in einfachen Fällen mit Hilfe der Beziehung $E = U/l$ berechnet werden. c) Ist die Potentialdifferenz durch Messung bereits bekannt,

so läßt sich die mit einer Ladungsverschiebung zusammenhängende Arbeit mit Hilfe der Beziehung $W = QU$ berechnen.

Wenn, wie beim elektrostatischen Feld, das Linienintegral über eine geschlossene Kurve verschwindet, wenn wir also ein wirbelfreies Vektorfeld vor uns haben, dann kann das Vektorfeld aus einem skalaren Potentialfeld hergeleitet werden. Die Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes folgt aus folgendem Analogieschluß: Wie bei dem Durchflutungsgesetz unter Anwendung des STOKESschen Satzes aus der Beziehung

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \int \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A}$$

die Grundgleichung rot $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ erhalten wurde, gewinnt man diesmal aus der Gleichung

$$\oint \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = 0$$

die erste Grundgleichung der Elektrostatik

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0. \tag{3.5.5}$$

Die Rotation des elektrischen Feldes $\mathfrak{E}$ ist also überall Null.

Beispiele und Ergänzungen

1. Kann ein Feld, dessen Feldstärke hinsichtlich der Richtung konstant ist, aber seiner Größe nach sich senkrecht zu den Feldlinien ändert, elektrostatisch sein (Abb. 102)?

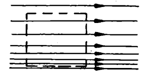


Abb. 102. Nichtelektrostatisches Kraftfeld

Dies ist nicht möglich. Integriert man nämlich die Feldstärke längs des in der Abbildung eingetragenen Vierecks, erhält man

$$\oint \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} \neq 0.$$

3.6. Veranschaulichung des Kraftfeldes durch ein System von Schichtflächen

Wird in sämtlichen Punkten des Raumes der in diesen existierende Potentialwert eingetragen und werden alle Punkte mit gleichem Potential verbunden,

erhält man ein System von *Äquipotential-*, *Schicht-* oder *Niveauflächen.* Wird eine Ladung auf einer solchen Fläche verschoben, so wird keine Arbeit geleistet, da sich die Arbeit aus dem Produkt von Ladung und Potentialdifferenz ergibt und die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten einer Schichtfläche definitionsgemäß immer verschwindet. Daraus ergibt sich wiederum, daß die Schichtflächen überall auf den Kraftlinien senkrecht stehen müssen, weil im elektrischen Kraftfeld nur dann keine Arbeit geleistet wird, wenn die Bewegung senkrecht zu den Kraftlinien erfolgt. Das System der Schichtflächen kann zur Kennzeichnung des Kraftfeldes verwendet werden. Dabei geht man von der durch den Potentialbezugspunkt hindurchgehenden Fläche, also von der nullten Äquipotentialfläche, aus und zeichnet der Reihe nach jene Äquipotentialflächen, zwischen denen eine konstante vorgegebene Potentialdifferenz besteht.

Aus der Dichte der Niveauflächen in einem Gebiet des Feldes kann man die Kraft, die auf eine dort untergebrachte Ladungseinheit wirkt, und damit die Feldstärke bestimmen. Die Potentialdifferenz zwischen den Niveauflächen soll beispielsweise ΔU betragen. Der senkrechte Abstand zwischen den Niveauflächen möge an einer Stelle Δn sein. Dann haben wir an dieser Stelle eine Feldstärke

$$E = \frac{\Delta U}{\Delta n}. \tag{3.6.1}$$

Der berechnete Wert von E wird um so genauer sein, je kleiner die gewählte konstante Schichtdifferenz ΔU ist (Abb. 103). Nach dem Grenzübergang erhält man den beliebig genauen Wert

$$E = dU/dn.$$

Bei der Wahl eines konstanten Wertes ΔU ist die Feldstärke dem vertikalen Abstand zwischen den Niveauflächen umgekehrt proportional. Die Niveauflächendarstellung bietet also eine gute Übersicht über den Verlauf des Kraftfeldes und speziell über die Stellen, die in bezug auf übermäßig hohe Feldstärkewerte gefährdet sind.

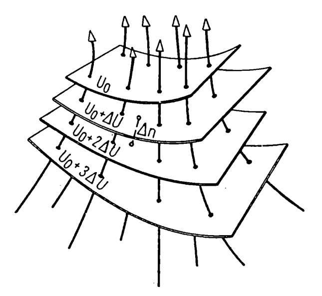


Abb. 103. Äquipotentialflächen eines Kraftfeldes

Der Zusammenhang zwischen den Potentialänderungen, die richtungsabhängig auf die verschiedenen Einheitswegstrecken entfallen, und dem Kraftfeld kann folgendermaßen bestimmt werden. Der Potentialwert im Punkt P sei U_P, in einem um die Strecke $d\mathfrak{l}$ benachbarten Punkt P'

$$U_{P'} = U_P + dU.$$

Dann gilt

$$dU = U_{P'} - U_P = -(U_P - U_{P'}) = -\mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = -E_l\, dl$$

oder

$$E_l = -dU/dl.$$

Die in eine beliebige Richtung fallende Komponente der Feldstärke ergibt sich also durch die auf die Einheitsweglänge entfallende Potentialänderung in dieser Richtung.

Der Vektor, der mit der Änderung eines Skalars in einer solchen Beziehung steht, ist der Gradient des betreffenden Skalars. Damit lautet die Beziehung zwischen der elektrischen Feldstärke und dem Potential endgültig

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U.$$

3.7. Der Gaussssche Satz der Elektrostatik

Vom allgemeinen Coulombschen Gesetz ausgehend, kann der Zusammenhang zwischen Ladung und Feldstärke in eine Form gebracht werden, in der die Gesetzmäßigkeit auch für einen mit einem beliebigen Nichtleiter erfüllten Raum gilt.

Die Zahl der Kraftlinien, die von einer Punktladung aus zu zeichnen sind, und deren Richtung werden vom Absolutbetrag der Feldstärke in sämtlichen Feldpunkten und von der Richtung der Feldstärke vorgeschrieben. Die Feldstärke hat im Abstand r von der Punktladung den Wert

$$E = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

Die gleiche Zahl Kraftlinien müssen durch die auf diesen senkrecht stehende Einheitsfläche gehen (Abb. 104a). Die Summe sämtlicher Kraftlinien, die durch die Oberfläche einer Kugel vom Radius r mit der Punktladung als Mittelpunkt hindurchtreten, ist

$$EA = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Wiederholt man diese Überlegung Punkt für Punkt für den Vektor $\mathfrak{D}$, so ergibt sich

$$DA = \varepsilon_0 EA = \varepsilon_0 \frac{Q}{\varepsilon_0} = Q .$$

Aus einer Ladung Q treten demnach gerade so viele Verschiebungslinien, wie die Ladung selbst angibt. Diese einfache Beziehung begründet die Einführung des Verschiebungsvektors.

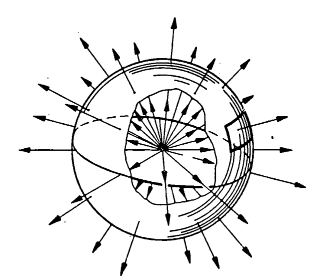


Abb. 104a. Bestimmung sämtlicher von einer Punktladung ausgehenden Kraftlinien

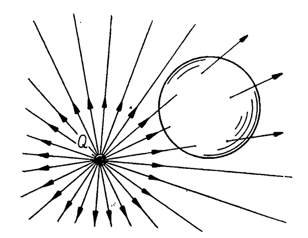


Abb. 104b. Punktladung außerhalb der Kugel

Was vorstehend für die Kugel bewiesen wurde, gilt naturgemäß auch für jede andere geschlossene Fläche, die die Ladung umschließt. Befindet sich die Ladung außerhalb einer geschlossenen Fläche (Abb. 104b), so treten in das von der Fläche berandete Gebiet ebenso viele Kraftlinien ein wie aus. Berücksichtigt man die austretenden Kraftlinien mit positivem, die eintretenden Kraftlinien hingegen mit negativem Vorzeichen, so kann gesagt werden, daß die Zahl der Kraftlinien, die die Fläche durchdringen, gleich Null ist, falls im Innern der geschlossenen Fläche selbst keine Ladung vorhanden ist. Die Zahl der Verschiebungslinien, die aus einer geschlossenen Fläche um die Ladung $+Q$ austreten, ist also $+Q$, und die Zahl der Verschiebungslinien, die durch die die Ladung $-Q$ umgebende Fläche hindurchgehen, ist $-Q$, weil in diesem Fall sämtliche Verschiebungslinien die Fläche von außen durchdringen.

Wird das elektrische Feld von mehreren Punktladungen untersucht, so wird in einem beliebigen Feldpunkt der resultierende Verschiebungsvektor, ebenso wie die resultierende elektrische Feldstärke, durch die vektorielle Resultierende gegeben sein, die sich aus den Verschiebungsvektoren der

einzelnen Ladungen zusammensetzt. Ist hierbei $\mathfrak{D}_i$ der von der Ladung Q_i erzeugte Verschiebungsvektor, so gilt

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \cdots + \mathfrak{D}_n.$$

Die Größe der Verschiebung, die durch eine beliebige geschlossene Fläche in diesem Feld hindurchgeht, ist

$$\oint \mathfrak{D}\, d\mathfrak{A} = \oint \mathfrak{D}_1\, d\mathfrak{A} + \oint \mathfrak{D}_2\, d\mathfrak{A} + \cdots + \oint \mathfrak{D}_n\, d\mathfrak{A}.$$

Die Glieder der rechten Seite dieser Gleichung bedeuten die aus den betreffenden Ladungen sich ergebenden *Verschiebungsflüsse.* Diese sind gleich Null, falls sich die Ladung außerhalb der geschlossenen Fläche befindet, oder gleich Q, falls die Ladung innerhalb der Fläche liegt. Damit gewinnt man die Beziehung

$$\oint \mathfrak{D}\, d\mathfrak{A} = \sum_i Q_i = Q.$$

Der durch eine geschlossene Fläche hindurchgehende elektrische Verschiebungsfluß ist also gleich der Summe der Ladungen, die sich im Innern der geschlossenen Fläche befinden, ganz unabhängig davon, wie die Ladungen angeordnet sind, und auch unabhängig davon, welche Form die gewählte Fläche besitzt. Dieser besonders wichtige Satz wird der GAUSS*sche Satz der Elektrostatik* genannt.

Der GAUSSsche Satz gilt natürlich auch für stetig verteilte Ladungen, weil auch diese in Wirklichkeit aus punktförmigen Ladungen bestehen. In diesem Fall ist die Größe einer durch eine geschlossene Fläche abgegrenzten Ladung

$$Q = \int \varrho\, dV,$$

und der Satz von GAUSS lautet

$$\oint \mathfrak{D}\, d\mathfrak{A} = \int \varrho\, dV.$$

Durch den Satz von GAUSS besteht zwischen der von einer geschlossenen Fläche umgebenen Ladung und dem Flächenintegral des Verschiebungsvektors ein Zusammenhang. Er eignet sich im allgemeinen nicht zur Bestimmung der Feldstärke in einem bestimmten Raumpunkt, es sei denn, daß der qualitative Verlauf der Kraftfeld- oder Verschiebungslinien, etwa auf Grund einer Symmetrieüberlegung, bereits bekannt ist.

3.8. Nichtleiter und Leiter

Wenn ein Ladungssystem, bestehend aus den Punktladungen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, im Vakuum gegeben ist, so sieht man leicht ein, daß das System keine Gleichgewichtslage haben kann, wenn nur die elektrostatischen Wirkungen berücksichtigt werden: Die Ladungen setzen sich in Bewegung.

Dies wird quantitativ durch den Satz von EARNSHAW bestätigt, der aussagt: Elektrische Ladungen können nicht so angeordnet werden, daß die elektrostatische Energie einen Minimalwert annimmt. Ein ähnlicher Satz besagt, daß das elektrostatische Potential ebenfalls nirgends ein Minimum besitzen kann, höchstens dort, wo sich Ladungen befinden. Daraus folgt, daß die potentielle Energie einer von außen eingebrachten Ladung im freien Raum ebenfalls kein Minimum besitzen kann.

Man kann also keine „elektrostatische Wand" herstellen, die ein geladenes Teilchen einsperrt. Das Teilchen bewegt sich entweder zum Unendlichen oder läuft an eine Elektrode, auf der eben die felderzeugenden Ladungen sitzen.

Aus dem bisher Gesagten folgt z. B., daß auch die Atome nicht allein durch elektrostatische Kräfte zusammengehalten werden können. In der Tat spielen bei atomaren oder molekularen Verbindungen neben den elektrostatischen auch elektrodynamische und sogar Kräfte ganz anderer Art (Austauschkräfte) eine entscheidende Rolle.

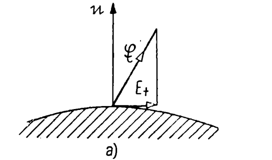
Wenn wir also von einem statischen Feld sprechen, so verstehen wir darunter das Feld solcher Ladungen, die sich irgendwie auf fixierten Körpern befinden.

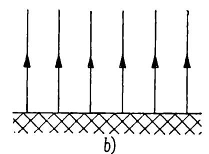
Je nachdem, wie sich die Körper gegenüber Ladungen verhalten, die auf sie gebracht werden, werden sie zwischen den idealen Isolatoren und den idealen Leitern eingeordnet. Die Teilchen eines idealen Nichtleiters werden durch (nichtelektrostatische) Kräfte zusammengehalten; sie können sich nicht frei bewegen, sondern können höchstens durch äußere elektrostatische Kräfte gegeneinander verschoben oder polarisiert werden. Eine auf sie gebrachte Ladung bleibt lange Zeit hindurch am gleichen Ort. Ein Nichtleiter kann entweder im Innern oder auf der Oberfläche elektrische Ladung in Form von Raum- oder Flächenladungsdichte besitzen. Die Verteilung der Ladungen wird von der Geometrie der Anordnung wenig beeinflußt.

In den (idealen) Leitern können sich die Ladungsträger, d. h. die Elektronen, demgegenüber sehr leicht — bereits durch den Einfluß sehr schwacher Felder — fortbewegen. Ihre Bewegungsfreiheit wird nur durch die Oberfläche des Leiters beschränkt, wo ein „Potentialwall" — teils elektrostatischer, teils anderer Natur — ihren Austritt unter gewöhnlichen Umständen verhindert. Gerade wegen dieser Beweglichkeit der Ladungsträger ist die Feldstärke im

Innern eines Leiters stets Null. Fänden wir im Innern des Leiters eine von Null verschiedene Feldstärke vor, so würden die Ladungen durch die Wirkung des dort bestehenden Feldes in Bewegung geraten und diese Bewegung so lange beibehalten, bis durch die Wirkung der derart verschobenen Ladungen die im Innern des Leiters vorhandene Feldstärke aufgehoben wird. Daraus folgt, daß im Innern auch keine eingebrachten Ladungen statisch existieren können, da sie ein Feld erzeugen würden. Es bleibt also für die Ladungen nur die einzige Möglichkeit, sich auf der Oberfläche des Leiters zu verteilen.

Aus dem gleichen Grund müssen die Kraftlinien des elektrostatischen Feldes auf der Leiteroberfläche senkrecht stehen, weil die Feldstärke andernfalls eine endlich große in der Oberfläche liegende Komponente besitzen würde, deren Wirkung dann die Ladungen so lange verschieben würde, bis sich eine Ladungsverteilung einstellt, die diese Komponente aufhebt. Die Oberfläche eines Leiters ist also im statischen Feld eine Äquipotentialfläche (Abb. 105).





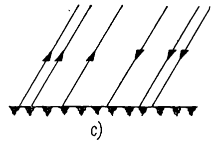


Abb. 105. Im statischen Fall (b) steht das elektrische Feld senkrecht zur Metalloberfläche. Im allgemeinen Fall sind auch die Kraftlinienbilder a) und c) möglich

Nehmen wir einen Hohlraum mit metallischer Begrenzungsfläche an. Solange sich keine Ladung im Innern befindet, kann auch kein statisches Feld vorhanden sein. Die Feldlinien müßten nämlich auf der Metallfläche enden. Dann läge aber kein wirbelfreies Feld vor: Das Linienintegral über die gestrichelt gezeichnete Linie der Abbildung 106 würde einen von Null verschiedenen Wert ergeben. Solche Wirbelfelder kommen in der Mikrowellentechnik, also im schnell veränderlichen Fall, vor.

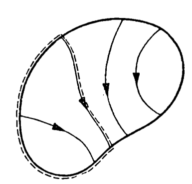


Abb. 106. In einem Hohlraum mit metallischer Begrenzungsfläche kann kein wirbelfreies Feld bestehen, solange sich im Hohlraum keine Ladung befindet

Die Tatsache, daß sich Ladungen auf einer Leiteroberfläche unter dem Einfluß kleinster Kraftfelder verschieben können, erklärt auch die Erscheinung

der elektrischen Influenz. Bringt man z. B. in das Kraftfeld einer Punktladung einen ungeladenen Metallkörper (Abb. 107), so findet man, daß auf dessen Oberfläche eine Flächenladungsdichte auftritt. Die Überlagerung des ursprünglichen Feldes und des Feldes dieser getrennten oder „influenzierten" Ladungen ergibt ein resultierendes Feld, welches im Innern des Metallkörpers verschwindet und außerdem auf der Oberfläche senkrecht steht. Da das Metall elektrisch neutral war, muß dabei auf der Metalloberfläche eine gleichgroße Ladung mit entgegengesetztem Vorzeichen auftreten.

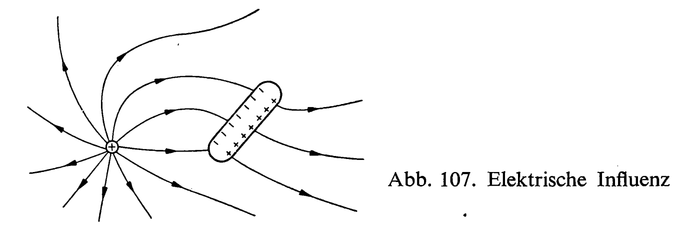


Abb. 107. Elektrische Influenz

Das gleiche gilt für einen Hohlraum mit metallischen Begrenzungsflächen. Da im Hohlraum kein von äußeren Ladungen herrührendes Feld entstehen kann, können z. B. elektrische Meßgeräte auf diese Weise leicht elektrostatisch „abgeschirmt", d. h. gegen die Einwirkungen fremder Kräfte geschützt werden.

Bringen wir jetzt Ladungen in einen metallisch begrenzten Hohlraum hinein, so wird eine gleichgroße Ladung mit entgegengesetztem Vorzeichen auf der inneren Begrenzungsfläche influenziert (Abb. 108). Das Flächenintegral über eine Fläche, welche gänzlich im Innern der Metallwand liegt und den Hohlraum umhüllt, ergibt nämlich Null, da im Metallinnern $D = 0$ ist, und wir erhalten nach dem GAUSSschen Satz auch für die enthaltene Gesamtladung Null.

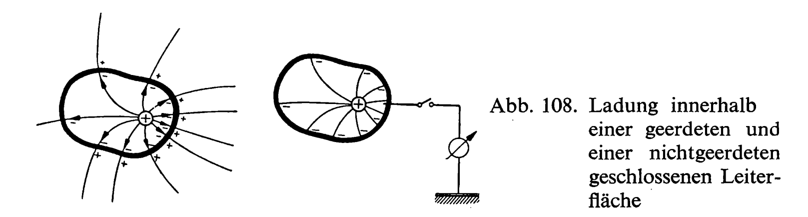


Abb. 108. Ladung innerhalb einer geerdeten und einer nichtgeerdeten geschlossenen Leiterfläche

Auf der äußeren Oberfläche der Metallwand erscheint wieder eine der ursprünglichen Ladung nach Größe und Vorzeichen gleiche Ladung, da die Metallwand als elektrisch neutral angenommen wurde. Eine Ladung in einem Metallgehäuse wirkt demnach auch nach außen, wenn das Gehäuse nur nicht geerdet wird.

3.9. Anwendung des GAUSSschen Satzes auf einige einfache Fälle

3.9.1. *Zusammenhang zwischen Flächenladungsdichte und Verschiebungsvektor*

Mit Hilfe des GAUSSschen Satzes kann zwischen der Ladungsdichte auf einer Leiterfläche und der elektrischen Feldstärke in unmittelbarer Umgebung der Fläche eine einfache, aber sehr wichtige Beziehung gewonnen werden. Die Oberfläche des metallenen Leiters besitze die Ladungsdichte σ. Im Innern des Leiters existiert bekanntlich keine Feldstärke. Entsprechend der Abb. 109

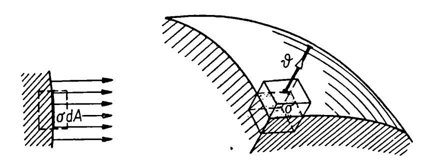


Abb. 109. Flächenladungsdichte und Verschiebungsvektor

wählen wir eine prismatische Fläche, auf die wir den GAUSSschen Satz anwenden. Wir wissen schon, daß die Zahl der aus dieser Fläche austretenden Verschiebungslinien gleich der darin befindlichen Ladung ist. Ist die Grundfläche des Prismas dA, so ist die eingeschlossene Flächenladung gleich $\sigma\, dA$. Ebensogroß ist die Zahl der austretenden Verschiebungslinien, die auf der Leiterfläche sämtlich senkrecht stehen und deshalb sämtlich durch die Deckfläche des Prismas treten. Ihre Zahl ist, falls die Zahl der durch die Flächeneinheit gehenden Verschiebungslinien D beträgt, $D\, dA$. Durch Anwendung des GAUSSschen Satzes, wonach die Zahl sämtlicher austretenden Verschiebungslinien gleich der darin befindlichen Ladung ist, erhält man

$$\sigma\, dA = D\, dA$$

und daraus

$$D = \sigma. \tag{3.9.1}$$

Die Größe des Verschiebungsvektors ist demnach in unmittelbarer Umgebung einer Leiteroberfläche gleich der darin herrschenden Ladungsdichte. Entsprechend wird die Feldstärke

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

und wir erhalten für die Größe der Flächenladungsdichte

$$\sigma = \varepsilon_0 E.$$

Diese einfachen, für die Praxis bedeutenden Gleichungen zeigen anschaulich den Vorteil des MKS-Systems.

Die Voraussetzungen, daß $-D$ auf der Fläche senkrecht steht und auf der inneren Oberfläche gleich Null ist, gelten natürlich nur für einen metallischen Leiter. Bei einem Nichtleiter beträgt das Integral über die äußere Fläche $D_{n1}\,dA$, das über die innere Fläche $-D_{n2}\,dA$; mithin wird durch eine Flächenladung nur die Änderung der der Flächennormalen parallelen Komponente von D durch die Beziehung

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma \tag{3.9.2}$$

bestimmt. In σ kann die Flächenquellendichte erkannt werden.

3.9.2. *Das Feld einer geladenen Kugel*

Auf einer Metallkugel mit dem Halbmesser r_0 sei eine Ladung Q verteilt. Wird im Abstand r vom Mittelpunkt der Kugel eine Kugelfläche angenommen, dann gilt für diese unter Anwendung des Satzes von GAUSS

$$4\pi r^2 D = Q.$$

Hierbei haben wir bereits völlige Kugelsymmetrie der Ladungsverteilung angenommen. Damit haben der Verschiebungsvektor und die elektrische Feldstärke den Wert

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}, \qquad E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Die Feldstärke außerhalb einer geladenen Kugel mit endlichem Radius kann demnach genauso berechnet werden, als ob sich die Ladung im Mittelpunkt der Kugel befände. Da im Kugelinnern die Feldstärke überall Null ist, ergibt sich der in Abb. 110a gezeichnete Feldstärkeverlauf. Den größten Wert hat die Feldstärke auf der Kugeloberfläche mit

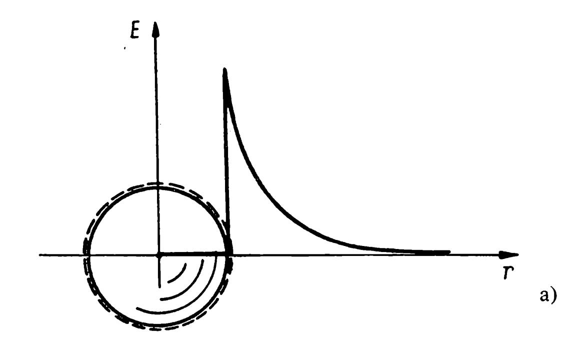
$$E_{\max} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0^2}.$$

Das gleiche Ergebnis erhält man auch für den Feldstärkeverlauf außerhalb einer homogenen Raumladung von Kugelgestalt: Die Gesamtladung der Kugel ist

$$Q = \frac{4\pi\,r_0^3}{3}\,\varrho.$$

Wird der Satz von GAUSS auf eine Kugel angewendet, deren Radius größer als r_0 ist, so erhält man wieder

$$E = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r^2}.$$



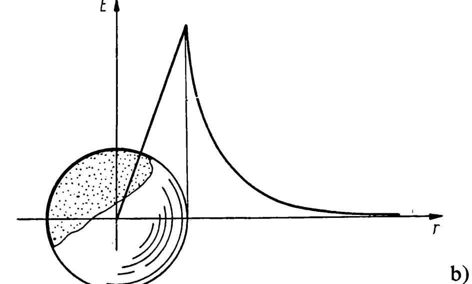


Abb. 110. Feld einer Kugel

a) mit konstanter Flächenladung

b) mit konstanter Raumladung

Ist hingegen $r < r_0$, so befindet sich im Innern der Kugel mit dem Radius r die Ladungsmenge

$$\frac{4\pi\,r^3}{3}\,\varrho.$$

Der Satz von GAUSS wird damit

$$4\pi\,r^2 D = \frac{4\pi\,r^3}{3}\,\varrho,$$

und man erhält

$$D = \varrho\,\frac{r}{3} \quad \text{bzw.} \quad E = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}\,\frac{r}{3}.$$

Drückt man noch ϱ durch die Gesamtladung aus,

$$\varrho = \frac{3Q}{4\pi\, r_0^3},$$

dann wird

$$E = \frac{Q}{4\pi\, \varepsilon_0}\, \frac{r}{r_0^3}.$$

Die Feldstärke wächst also vom Mittelpunkt der Raumladung nach außen linear an, erreicht ihren Höchstwert auf der Oberfläche und nimmt dann gemäß $1/r^2$ ab (Abb. 110b).

3.9.3. *Das Feld ebener Elektroden*

Im Abstand d seien zwei beladene Flächen von der Größe A parallel angeordnet. Der Abstand d sei im Vergleich zu den übrigen Flächenabmessungen gering. Der qualitative Verlauf der Kraftlinien ist in Abb. 111

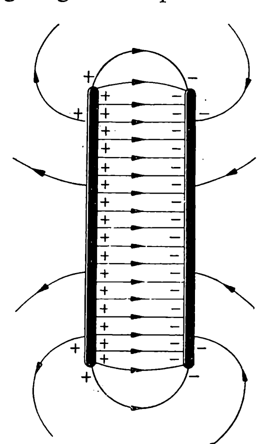


Abb. 111. Feld zweier ebener Elektroden

gezeichnet. Das Kraftfeld kann zwischen den Elektroden als homogen angesehen werden, wenn auf die eine Fläche eine Ladung $+Q$, auf die andere eine Ladung $-Q$ gebracht wird. Die Ladungsdichte beträgt auf den inneren Seiten beider Flächen

$$\sigma = Q/A.$$

Damit ist zugleich der Betrag des Verschiebungsvektors gegeben:

$$D = \sigma = Q/A.$$

Entsprechend hat die Feldstärke den Wert

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A}. \tag{3.9.3}$$

Die am Rand auftretende Streuung wurde hier vernachlässigt.

Beispiele und Ergänzungen

1. Die Durchschlagsfestigkeit der Luft ist $E_{kr} = 3 \cdot 10^6$ V/m. Die größte Flächenladungsdichte, die auf eine in Luft befindliche Metallfläche aufgebracht werden kann, ist dann

$$\sigma_{max} = D_{max} = \varepsilon_0 E_{kr} = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^6 = 2{,}658 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}.$$

Ist die Ladungsverteilung homogen, kann man die maximale Ladung durch Multiplikation mit der Fläche gewinnen. Dieser Fall liegt z. B. bei der Kugel vor. Die Gesamtladung, die auf eine Kugel mit dem Halbmesser $r_0 = 1$ m gebracht werden kann, ist

$$Q_{max} = 4r_0^2\,\pi\sigma_{max} = 4 \cdot 1^2 \cdot \pi \cdot 2{,}658 \cdot 10^{-5} = 3{,}33 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}.$$

2. Wie groß ist der Abstand, bei dem sich zwei Kugeln, die jede eine Ladung von 1 C verschiedenen Vorzeichens tragen, gerade mit der Kraft von 1 N anziehen? Das von der einen Kugel erzeugte Feld ist im Abstand r von dieser

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \approx \frac{9 \cdot 10^9}{r^2}.$$

Wenn dort die andere Kugel als punktförmig angesehen werden kann, so wird auf alle Ladungselemente die gleiche Kraft wirken, so daß dann auf diese Kugel die Kraft

$$F = QE = \frac{9 \cdot 10^9}{r^2}$$

wirkt. Für $F = 1$ N errechnet man

$$r = r_1 = \sqrt{9 \cdot 10^9}\,\mathrm{m} = 9{,}48 \cdot 10^4\,\mathrm{m} = 94{,}8\,\mathrm{km}.$$

Es muß noch geprüft werden, ob die Kugel, die eine Ladung von 1 C aufzunehmen vermag, bei diesem Abstand als punktförmig angesehen werden kann. Der erforderliche Halbmesser beträgt

$$r_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{E_{kr}}} = \sqrt{9 \cdot 10^9\,\frac{1}{3 \cdot 10^6}} = 54{,}6\,\mathrm{m}.$$

Das Verhältnis

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{54{,}6}{9{,}48 \cdot 10^4} = 5{,}7 \cdot 10^{-4}$$

ist sehr klein, und die Kugel mit dem Radius von 54,6 m kann in unserer Berechnung tatsächlich als punktförmig angesehen werden.

Aus dieser Aufgabe können folgende Schlüsse gezogen werden:

a) Während 1 C beim Ladungstransport im Inneren eines Leiters ein allgemein vorkommender Wert ist, stellt es als statische Ladung einen beachtlich großen Wert dar. Die statische Wirkung der im Innern eines Metalls fließenden Elektronen wird durch das Ionengitter des Metalls aufgehoben.

b) Ob eine Anordnung als punktförmig angesehen werden kann oder nicht, wird nur durch eine eingehende Untersuchung entschieden.

3. Auf der Oberfläche der Erde beträgt der Durchschnittswert der Feldstärke $E = 150$ V/m.

Nimmt man die Flächenladungsdichte als homogen an, so findet man dafür den Wert

$$\sigma = D = \varepsilon_0 E = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 150 = 1{,}33 \cdot 10^{-9} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}.$$

Die Gesamtladung der Erde wird damit (der Radius der Erde beträgt 6370 km)

$$Q = \sigma A = 1{,}33 \cdot 10^{-9} \cdot 4\pi\,(6{,}37 \cdot 10^6)^2 = 0{,}66 \cdot 10^6\ \mathrm{C}.$$

3.10. Feldstärke- und Potentialverhältnisse bei einigen einfachen Ladungsverteilungen

3.10.1. *Das Feld der Punktladung*

Für die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten P und O im Felde einer Punktladung gilt nach (3.5.3) und (3.4.1)

$$U_{PO} = \int_P^O \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}\, \mathfrak{r}^0.$$

Falls die Punkte so zueinander liegen, daß die Richtung des Verbindungsvektors mit der der Feldstärke zusammenfällt (Abb. 112), vereinfacht sich das innere Produkt zweier Vektoren zum Produkt ihrer Absolutbeträge, und man erhält

$$U_{PO} = \int_{r_P}^{r_O} E\, dr = \int_{r_P}^{r_O} \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}\, dr = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_O}\right]. \tag{3.10.1}$$

Wird nun als Potentialbezugspunkt der unendlich ferne Punkt genommen, so wird mit $r_O \to \infty$ das Potential eines beliebigen Punktes $P(x, y, z)$ im Abstand $r = r_P$ von der Punktladung

$$U_{P\infty} = U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q}{r}. \tag{3.10.2}$$

Im Bereich einer Punktladung hängt nach (3.10.2) der Wert des Potentials nur vom Abstand zum Aufpunkt ab. Der Verlauf des Potentials ist durch ein hyperbolisches Abstandsgesetz gegeben. Das Potential eines beliebigen Punktes stimmt mit der Arbeit überein, die zu leisten ist, wenn die positive Einheitsladung aus dem Unendlichen in den betreffenden Punkt übergeführt wird.

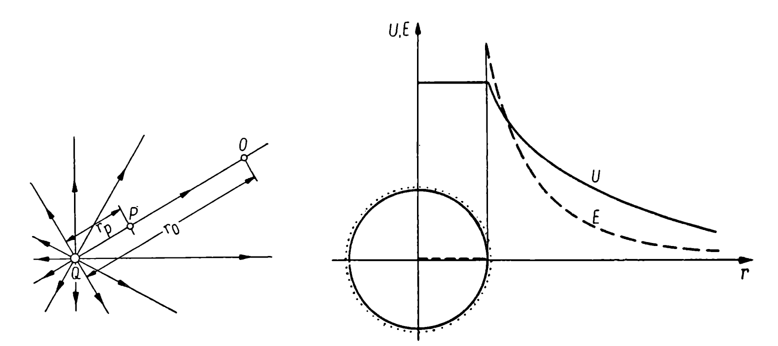


Abb. 112. Feld einer Punktladung

Abb. 113. Potential und Feldstärke einer Metallkugel von endlichem Halbmesser

Am Ort der Punktladung wird das Potential unendlich groß. Das gleiche galt auch für die Feldstärke. Um diese Singularität auszuschalten, gehen wir direkt zum Feld einer endlichen Kugel über und stellen es mit Hilfe der Äquipotentialflächen dar. Das Kraftfeld der geladenen Metallkugel stimmte außerhalb der Kugel genau mit dem Feld überein, das von der im Mittelpunkt der Kugel konzentriert gedachten Gesamtladung herrührt. So läßt sich das Potential außerhalb der Kugel analog zum Potential der Punktladung berechnen. Für das Potential auf der Kugelfläche gilt dann, wenn r_0 der Kugelradius ist,

$$U = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0}. \tag{3.10.3}$$

Auf der Kugelfläche und damit auch im Innern der Kugel, wo die Feldstärke verschwindet, ist das Potential konstant. Der radiale Verlauf des Potentials und der Feldstärke ist in Abb. 113 dargestellt.

Zwischen dem auf der Kugelfläche meßbaren Potential U und der Feldstärke bestehen die einfachen Beziehungen

$$U = Er_0; \quad E = \frac{U}{r_0}, \tag{3.10.4}$$

die sich aus den Gleichungen (3.4.1) und (3.10.2) ergeben.

Die Gleichungen (3.10.4) darf man nicht als Ausdruck der Gleichung $U = El$ werten, die nur für die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten im homogenen Feld gültig ist. In der Gleichung $U = Er_0$ handelt es sich jedoch um die Spannung zwischen der Kugelfläche und dem unendlich fernen Punkt und um die auf der Kugel herrschende Feldstärke. Die Verhältnisse sind also ganz andere.

Beispiele und Ergänzungen

1. Das Kraftfeld einer Kugel, deren Ladung $Q = 2 \cdot 10^{-7}$ C und deren Radius $r_0 = 0{,}05$ m betragen, soll durch Äquipotentialflächen dargestellt werden. Das Oberflächenpotential ist

$$U_K = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12}}\,\frac{2 \cdot 10^{-7}}{0{,}05} \approx 36000 \text{ V}.$$

Wird zwischen zwei aufeinanderfolgenden Äquipotentialflächen eine Potentialdifferenz von 6000 V gewählt, so wird die Spannung der ersten Äquipotentialfläche, die nach der Kugeloberfläche kommt, 30000 V entsprechen. Für den Radius dieser Fläche erhält man aus

$$\frac{U_K}{U_P} = \frac{r}{r_0}$$

$$r = \frac{U_K}{U_P}\,r_0 = \frac{36000}{30000} \cdot 0{,}05 = 0{,}06 \text{ m}.$$

In der folgenden Tabelle sind die Spannungen der aufeinanderfolgenden Niveauflächen, die Kugelradien und die Abstände zwischen den Schichtflächen aufgeführt:

U [kV]	36		30		24		18		12		6		0
r [cm]	5		6		7,5		10		15		30		∞
Δr [cm]		1		1,5		2,5		5		15		∞	

Obwohl die Spannung zwischen zwei Niveauflächen konstant ist, werden die Abstände zwischen ihnen ständig größer. Die Ursache ist leicht einzusehen. In der Nähe der Kugel ist die Feldstärke, also die auf die Einheitsladung wirkende Kraft, sehr groß, und deshalb wird dort vom Feld die gleiche Arbeit längs einer viel kleineren Strecke geleistet als von einer Feldstärke in einem weiter entfernten Punkt (Abb. 114).

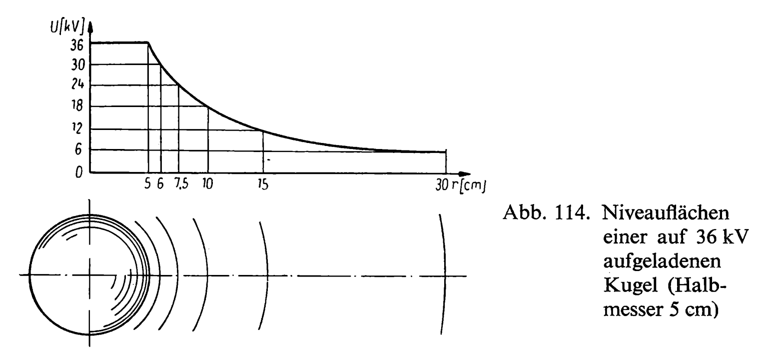


Abb. 114. Niveauflächen einer auf 36 kV aufgeladenen Kugel (Halbmesser 5 cm)

2. Die übersichtliche und eventuell auch quantitative Angaben liefernde Darstellung eines Kraftfeldes in der zweidimensionalen Papierebene bleibt auch nach der Einführung der Niveauflächen problematisch. Nehmen wir an, daß uns der Potentialverlauf selbst im Fall einer räumlichen Anordnung nur in einer bestimmten Ebene interessiert, z. B. bei einer Punktladung in einer Ebene, in der die Punktladung selbst enthalten ist. Man geht dann zweckmäßig folgendermaßen vor: Indem man den Schnitt dieser Ebene mit den Schichtflächen bestimmt, erhält man eine Kurvenschar mit den Potentialwerten als Parameter. Mit dieser Kurvenschar können auch numerische Berechnungen vorgenommen werden. Künftig werden wir uns dieses Verfahrens bedienen und stets darauf achten, daß in verwickelteren Fällen auch die Schnittebene mit angegeben wird, in der das Potentialfeld parametrisch dargestellt ist.

3. Diese Darstellung wird noch anschaulicher, wenn in sämtlichen Punkten der Ebene die dort existierenden Potentialwerte auf der Ebene senkrecht

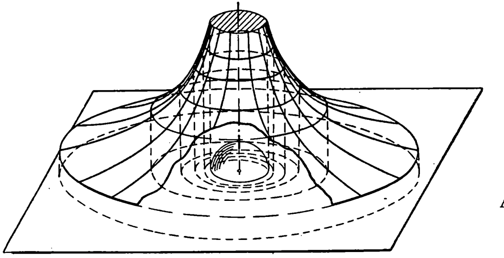


Abb. 115. Potentialgebirge

stehend aufgetragen werden. So gelangt man zu einem Potentialgebirge, wobei die Schnitte der Äquipotentialflächen mit der Ebene, die Äquipotentiallinien, zu Höhenschichtlinien des Potentialgebirges geworden sind (Abb. 115). Je

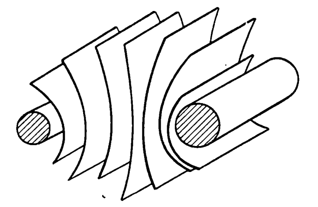


Abb. 116. Niveauflächen eines zylindrischen Kraftfeldes

steiler der Potentialberg ist, desto enger liegen die Schichtlinien beieinander, desto größer ist die Feldstärke in diesem Gebiet und umgekehrt. Das gesamte Kraftfeld wird durch einen einzigen Potentialberg nur im zylindrischen Kraft-

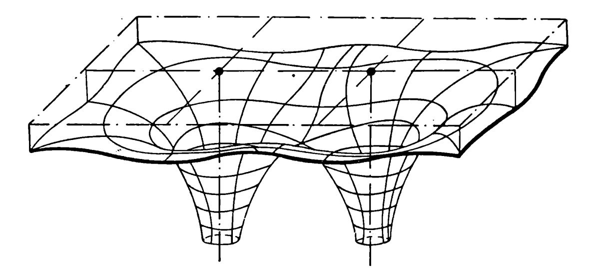


Abb. 117a. Potentialtrichter zweier negativer Ladungen

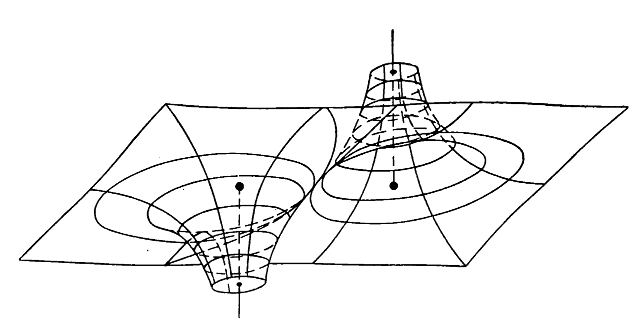


Abb. 117b. Potentialgebirge von Ladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen

feld gekennzeichnet (Abb. 116). Im allgemeinen müssen wenigstens auf drei zueinander senkrechten Ebenen Potentialgebirge gezeichnet werden, um einen Eindruck von einem allgemeinen Potentialfeld zu erhalten. Das System der Äquipotential- und Kraftlinien für gleichnamige und für ungleichnamige Punktladungen ist in den Abb. 117a und b gekennzeichnet.

3.10.2. *Das Feld zwischen ebenen Parallelflächen (Plattenkondensator)*

Die Feldstärke zwischen zwei ebenen, parallelen Flächen mit Ladungen verschiedenen Vorzeichens ist nach Gleichung (3.9.3) gleich

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A}.$$

Alle Äquipotentialflächen sind dann den beiden Ebenen parallel und die Abstände zwischen ihnen gleich groß. Dies entspricht dem Bild einer schiefen Ebene (Abb. 118). Die Spannung zwischen den beiden Platten beträgt

$$U = El = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A}\,l. \tag{3.10.5}$$

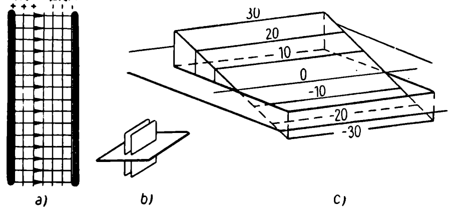


Abb. 118. a) Idealisiertes Feld eines Plattenkondensators; b) Ebene, in der die Potentialwerte untersucht werden; c) Darstellung des Potentials als „Potentialgebirge“

Auch außerhalb der beiden Platten existiert eine endliche Feldstärke. Die Berechnung dieses Streufeldes ist aber bereits sehr schwierig. Es wird später behandelt werden.

Im allgemeinen wird das Feld des Plattenkondensators als homogen angesehen. Die Feldstärke zwischen den Platten ist konstant, außerhalb dieser gleich Null. Durch diese Näherung werden für die Spannung, die Ladung des Kondensators, für die in ihm herrschende Kraftwirkung und für seine Kapazität verläßliche Ergebnisse geliefert. Hinsichtlich der an den Rändern auftretenden Wirkungen erhält man damit aber ein vollkommen falsches Bild. So muß z. B. der tatsächliche Kraftlinienverlauf am Rande des Kondensators ganz anders sein, da das Integral über die in Abb. 119 eingezeichnete geschlossene Kurve nicht verschwindet. Erst bei Berücksichtigung des Streufeldes verschwindet das Kurvenintegral, wie es die Theorie fordert.

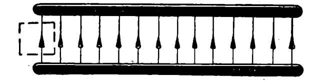


Abb. 119. Das idealisierte Feld eines Plattenkondensators ist nicht wirbelfrei

Beispiele und Ergänzungen

1. Zwei Kreisplatten mit den Halbmessern $r_0 = 0{,}5$ m stehen in einem Abstand $l = 2$ cm parallel gegenüber. Beide Platten tragen die Ladung $Q = 12\mu$C,

jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen. Da der Abstand im Vergleich zum Halbmesser der Platten klein ist, ist das Feld zwischen den Platten mit guter Näherung homogen. Die Spannung an diesem Kondensator ist dann

$$U = \frac{Ql}{\varepsilon_0 A} = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}5^2 \cdot \pi} \text{ V} = 3{,}45 \cdot 10^4 \text{ V} = 34{,}5 \text{ kV}.$$

Werden die Platten bei konstant gehaltener Ladungsmenge auseinandergezogen, so nimmt die Spannung proportional dem Abstand zu, z. B. bei $l = 10$ cm auf

$$U' = 5U = 172{,}5 \text{ kV}.$$

Die Spannung kann aber nicht beliebig steigen, wenn man die Platten voneinander sehr weit entfernt, da die Voraussetzung der Homogenität des Feldes schon unzulässig ist, wenn $l > 0{,}2\, r_0$ wird. Wird die eine Platte ins Unendliche entfernt, so bleibt das Potential der anderen Platte endlich. Der Wert des Potentials läßt sich aber nur sehr schwer bestimmen und kann mit den einfachen Mitteln, die uns bisher zur Verfügung stehen, nicht berechnet werden. Die Theorie liefert für den Grenzwert des Potentials den Wert

$$U_\infty = 2 \frac{Q}{8\varepsilon_0 r_0} = \frac{Q}{4\varepsilon_0 r_0}.$$

Diese Spannung würde bei einem homogenen Feld bei einem Plattenabstand $l = \frac{\pi}{4} r_0$ auftreten. In unserem Beispiel ist

$$U_\infty = \frac{12 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}5} \text{ V} = 6{,}8 \cdot 10^5 \text{ V} = 680 \text{ kV}$$

(Abb. 120).

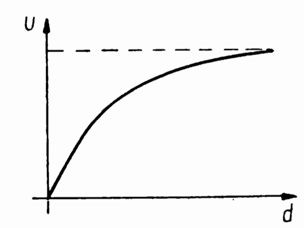


Abb. 120. Qualitativer Verlauf der Spannung eines Kondensators mit konstanter Ladung in Abhängigkeit vom Plattenabstand

3.10.3. *Das zylindrische Kraftfeld*

Die Ladungsdichte von Ladungen, die längs einer unendlich langen Geraden stetig angeordnet sind, also die auf die Längeneinheit entfallende Ladungsmenge, sei q. (In der Praxis kann das Feld langer, dünner, mit Ladungen ver-

sehener Leitungen aus den Potentialen dieses Modells in guter Näherung berechnet werden.) Aus Symmetriegründen werden die Feldstärkevektoren und die Verschiebungsvektoren radialsymmetrisch angeordnet sein. Der GAUSSsche Satz soll auf einen geschlossenen Zylinder mit dem Halbmesser r und von der Länge l angewendet werden (Abb. 121). Die Fläche des Zylinders ist

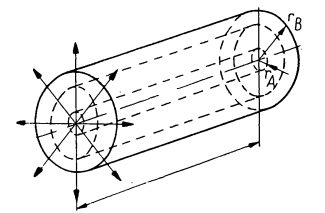


Abb. 121. Zylindrisches Kraftfeld

$2\pi rl$, die Summe der eingeschlossenen Ladungen lq. Da $\mathfrak{D}$ längs der Fläche konstant ist, ist der Verschiebungsfluß gleich $D \cdot 2\pi rl$, und der GAUSSsche Satz lautet

$$D \cdot 2\pi rl = lq.$$

Daraus folgen für die Größe des Verschiebungsvektors

$$D = \frac{1}{2\pi}\frac{q}{r} \tag{3.10.6}$$

und für die Größe der Feldstärke

$$E = D/\varepsilon_0 = \frac{1}{2\pi\,\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \tag{3.10.7}$$

Die Feldstärke nimmt demnach hier nur mit der ersten Potenz des Abstandes ab. Für die Potentialdifferenz zwischen zwei beliebigen Raumpunkten erhält man

$$U_A - U_B = \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{2\pi\,\varepsilon_0}\frac{q}{r}\,dr = \frac{q}{2\pi\,\varepsilon_0}\ln\frac{r_B}{r_A}. \tag{3.10.8}$$

Da das Potential des unendlich entfernten Punktes wegen des logarithmischen Faktors hierbei nicht als Nullpotential gewählt werden kann, bezieht man alle Potentialwerte auf einen Zylinder mit dem Radius 1 und schreibt das Potential des zylindrischen Kraftfeldes in der Form

$$U = \frac{q}{2\pi\,\varepsilon_0}\ln\frac{1}{r}. \tag{3.10.9}$$

Dadurch wird eine Analogie zum Potential einer Kugel

$$U = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{r} \tag{3.10.10}$$

hergestellt. Man muß sich aber im klaren darüber sein, daß durch (3.10.10) die Potentialdifferenz geliefert wird, die zwischen einem Feldpunkt und dem unendlich fernen Punkt besteht, während die auf den Zylinder bezogene Formel (3.10.9) die Potentialdifferenz zwischen dem Feldpunkt und dem von der Achse in der Entfernung $r = 1$ liegenden Punkt liefert.

Es ist klar, daß die Äquipotentialflächen konzentrische Zylinder sind.

Das Kraftfeld eines zylindrischen Leiters mit endlichem Radius wird mit derselben Begründung, wie sie bei der Kugel hergeleitet wurde, außerhalb des Zylinders das gleiche sein wie das einer linearen Ladungsverteilung, die in der Achse des Zylinders konzentriert ist. Der Potentialwert ist auf der Zylinderoberfläche und auch im Zylinderinnern konstant, der Wert der Feldstärke ist im Innern des Zylinders gleich Null.

3.10.4. *Das Feld zweier paralleler Geraden, die mit Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens versehen sind*

Auf Grund des Überlagerungsprinzips gilt für einen beliebigen Raumpunkt

$$U = \frac{q}{2\pi\,\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_1} - \frac{q}{2\pi\,\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_2} = \frac{q}{2\pi\,\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{3.10.11}$$

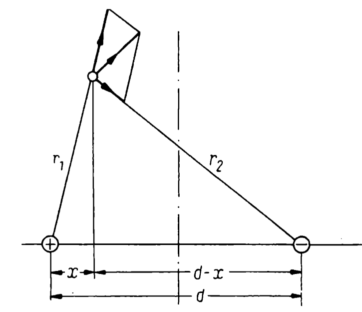


Abb. 122. Feld zweier paralleler Geraden mit Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens

Hierbei sind r_0 der Halbmesser der Zylinder, auf die die Potentialwerte der einzelnen Leiter bezogen werden, r_1 und r_2 die Abstände des Aufpunktes von der positiven bzw. negativen Ladung und d der Abstand zwischen beiden Geraden (Abb. 122). Für die Schar der Äquipotentialflächen ist

$$\frac{q}{2\pi\,\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \text{const}$$

oder

$$\frac{r_2}{r_1} = \text{const}' = k. \tag{3.10.12}$$

Die Äquipotentialflächen werden also Zylinder mit solchen Leitkurven sein, bei denen die Abstände sämtlicher Leitkurvenpunkte von zwei fixen Punkten in einem konstanten Verhältnis zueinander stehen. Mit

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad r_2 = \sqrt{(d - x)^2 + y^2}$$

wird

$$\frac{(d - x)^2 + y^2}{x^2 + y^2} = k^2$$

und daraus

$$x^2(k^2 - 1) + y^2(k^2 - 1) + 2dx = d^2.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt. Die Äquipotentialflächen sind also exzentrische Kreiszylinder. Dividiert man die letzte Gleichung durch $k^2 - 1$ und addiert auf beiden Seiten $\left(\frac{d}{k^2 - 1}\right)^2$, so erhält man

$$x^2 + \frac{2\,dx}{k^2 - 1} + \left(\frac{d}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{d^2}{k^2 - 1} + \left(\frac{d}{k^2 - 1}\right)^2$$

oder

$$\left(x + \frac{d}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{d^2}{k^2 - 1}\left(\frac{1}{k^2 - 1} + 1\right) = \frac{d^2k^2}{(k^2 - 1)^2}.$$

Hieraus kann entnommen werden, daß bei gegebenem Verhältnis k der Kreishalbmesser

$$r_0 = \frac{dk}{k^2 - 1} \tag{3.10.13}$$

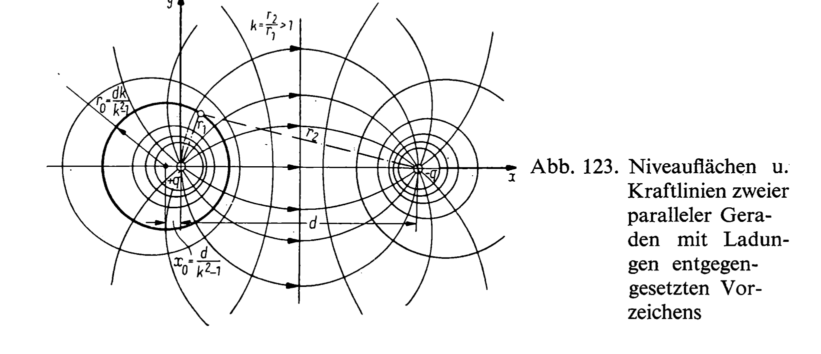


Abb. 123. Niveauflächen u. Kraftlinien zweier paralleler Geraden mit Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens

und die Verschiebung des Mittelpunktes

$$x_0 = -\frac{d}{k^2 - 1} \tag{3.10.14}$$

sind. Das hiernach konstruierte System der Schichtflächen und der Kraftlinien ist in Abb. 123 dargestellt.

Beispiele und Ergänzungen

1. Bisher wurden nur die Felder von unendlich langen Geraden untersucht. Dabei erhielten wir ebene Kraftfelder, die nur von den Koordinaten x, y, nicht aber von der z-Koordinate abhängen. Damit war die Berechnung des Potentials ebenfalls ein ebenes Problem. Ist das Geradenstück endlich, so hängt das Feld zwar von allen drei Koordinaten ab, aber es bleibt rotationssymmetrisch.

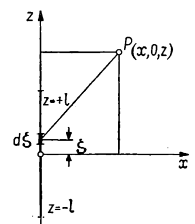


Abb. 124. Kraftfeld einer endlichen Linienladung

Die Ladung eines Linienelementes $d\zeta$ habe den Wert $q d\zeta$ (Abb. 124). Das Potential im Punkt $P(x, 0, z)$ in der xz-Ebene (wegen der Rotationssymmetrie genügt es, sich auf diese Ebene zu beschränken) bezüglich der Ladung $q d\zeta$ ist dann

$$dU = \frac{q\, d\zeta}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z - \zeta)^2}}, \tag{3.10.15}$$

und man erhält daraus die Potentialgleichung der endlichen geraden Linienladung der Länge $2l$ mit der homogenen Ladungsdichte q:

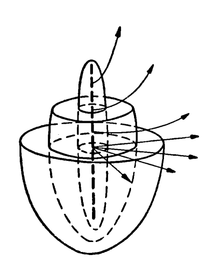
$$U = \int_{-l}^{+l} \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{d\zeta}{\sqrt{x^2 + (z - \zeta)^2}} = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0} \ln \frac{z + l + \sqrt{x^2 + (z + l)^2}}{z - l + \sqrt{x^2 + (z - l)^2}}. \tag{3.10.16}$$

Die Äquipotentialflächen sind konfokale Rotationsellipsoide, deren gemeinsame Brennpunkte die beiden Endpunkte des geladenen Linienstückes sind und die die z-Achse als Rotationsachse besitzen. Die Systeme der Äquipotentialflächen und Kraftlinien hierfür sind in Abb. 125 gezeichnet. In Gl. (3.10.16) kann wegen der Rotationssymmetrie x durch r ersetzt werden, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist.

Daß die Äquipotentialflächen tatsächlich konfokale Rotationsellipsoide sind, beweist man am einfachsten, indem man zeigt, daß alle Punkte, die auf dem Ellipsoid

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{r^2}{a^2 - l^2} = 1 \tag{3.10.17}$$

liegen, einen konstanten Potentialwert liefern.



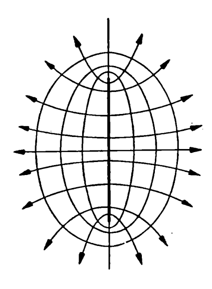


Abb. 125. Kraftlinien und Äquipotentialflächen einer endlich langen Linienladung

Aus Gleichung (3.10.17) folgt

$$r^2 = (a^2 - l^2)\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right),$$

$$r^2 + (z \pm l)^2 = a^2 - l^2 - z^2 + \frac{l^2 z^2}{a^2} + z^2 \pm 2lz + l^2$$

$$= \left(a \pm \frac{lz}{a}\right)^2.$$

Es wird also

$$z \pm l + \sqrt{r^2 + (z \pm l)^2} = z \pm l + a \pm \frac{lz}{a}$$

$$= (a \pm l)\left(1 + \frac{z}{a}\right).$$

Damit kann Gleichung (3.10.16) umgeschrieben werden in

$$U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{a + l}{a - l}.$$

Das ist aber für ein bestimmtes, durch die Halbachse a und die Exzentrizität l charakterisiertes Ellipsoid eine Konstante.

2. Das Potential der geraden Linienladung in der Ebene $z \equiv 0$ ist nach Gleichung (3.10.16), wenn x durch r ersetzt wird,

$$U = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0} \ln \frac{\sqrt{r^2 + l^2} + l}{\sqrt{r^2 + l^2} - l}. \qquad (3.10.18)$$

In der Ebene besitzt die Feldstärke nur eine radiale Komponente. (Dies kann aus der Symmetrie der Anordnung bezüglich der z-Richtung unmittelbar ersehen werden, läßt sich aber auch mathematisch beweisen, indem gezeigt wird, daß $\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$ ist.)

Der Feldstärkewert in der Symmetrieebene ist dann

$$E = -\frac{dU}{dr} = \frac{q}{2\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}}.$$

Nach (3.10.7) galt für das Feld der unendlich langen Linienladung

$$E = \frac{q}{2\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}.$$

Aus dem Vergleich beider Formeln folgt, daß für $l \to \infty$ oder $l \gg r$ die Felder des sehr langen endlichen und des unendlichen Zylinders ineinander übergehen. Ein Zylinder wird dann als lang angesehen, wenn seine Länge er-

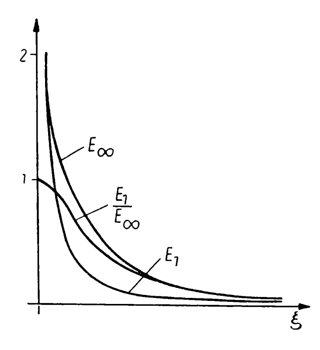


Abb. 126. Elektrisches Feld von endlichen und von unendlichen Linienladungen

heblich größer ist als der von seiner Achse gemessene Querabstand. Wird die Veränderliche $\xi = r/l$ eingeführt, erhält man für das Verhältnis der Feldstärken des endlichen zum unendlichen Zylinder (Abb. 126)

$$\frac{E_1}{E_\infty} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}.$$

Wird ein Fehler von 5% zugelassen, so ist der Wert ξ_0, bis zu welchem die Näherung durch eine unendliche Linie zulässig ist,

$$\frac{E_1}{E_\infty} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_0^2}} = \frac{1}{1{,}05}; \quad \xi_0 = \sqrt{1{,}05^2 - 1} = 0{,}316 = \frac{r}{l}.$$

3. Wir haben in diesem Abschnitt ausführlich bewiesen, daß die Leitkurven der Äquipotentialflächen in einer zur Doppelleitung senkrechten Ebene Kreise sind. Diese Kreise schneiden die elektrischen Kraftlinien natürlich überall senkrecht. Wir wollen nun beweisen, daß die magnetische Feldstärke der Doppelleitung – wenn die eine Leitung als Hin-, die andere als Rückleitung für den Strom I dient – in jedem Punkt senkrecht zur elektrischen Feldstärke steht.

Es gilt

$$\mathfrak{E} = \frac{q}{2\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+}\mathfrak{r}_+^0 - \frac{1}{r_-}\mathfrak{r}_-^0\right),$$

$$\mathfrak{H} = -\frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_+}\mathfrak{r}_+^0 \times \mathfrak{k} - \frac{1}{r_-}\mathfrak{r}_-^0 \times \mathfrak{k}\right)$$

$$= -\frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_+}\mathfrak{r}_+^0 - \frac{1}{r_-}\mathfrak{r}_-^0\right) \times \mathfrak{k}.$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{k}$ den Einheitsvektor in Richtung der Leitungen. Wir haben also

$$\mathfrak{H} = \frac{I}{2\pi}\,\frac{2\pi\,\varepsilon_0}{q}\,\mathfrak{k} \times \mathfrak{E}, \tag{3.10.19}$$

d. h., $\mathfrak{H}$ steht tatsächlich auf $\mathfrak{E}$ senkrecht. Die $\mathfrak{H}$-Linien einer Doppelleitung fallen also mit den Äquipotentiallinien des elektrischen Potentials zusammen, d. h. sind Kreise, deren Mittelpunkte auf der Verbindungslinie liegen.

Im Abschnitt 2.4. war gezeigt worden, wie das magnetische Feld einer unendlich langen geraden Linie aus einem magnetischen Potential abgeleitet

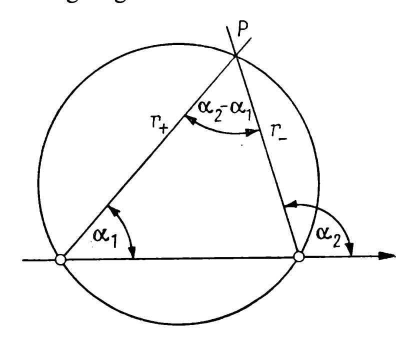


Abb. 127. Das magnetische Potential einer Doppelleitung. Die Ortskurven für $\alpha_2 - \alpha_1 = \text{const}$ sind Kreise

werden kann. Das war in der senkrechten Ebene gerade der Winkel, der durch den Fahrstrahl zum Aufpunkt und durch eine durch die Leitung gehende beliebige Gerade bestimmt wurde. Bei einer Doppelleitung nimmt man dementsprechend die Differenz der beiden Winkel (Abb. 127). So ergeben sich für die Äquipotentialflächen des magnetischen Feldes Kreise, die durch die Leitung hindurchgehen. Diese fallen also mit den elektrischen Feldlinien zusammen.

3.10.5. *Das Feld zweier verschieden großer ungleichnamiger Punktladungen*

Für das Potential in einem beliebigen Raumpunkt gilt

$$U = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_2}{r_2}\right]. \tag{3.10.20}$$

Über die Äquipotentialflächen läßt sich allgemein nicht viel sagen, man kann sie aber auf folgende Weise konstruieren: Wir bringen die Gleichung in nachstehende Form:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{Q_2}{Q_1}\frac{1}{r_2} = \frac{4\pi\,\varepsilon_0 U}{Q_1} = \frac{4\pi\,\varepsilon_0}{Q_1} n\Delta U,$$

wobei ΔU die zwischen den einzelnen Niveauflächen bestehende Spannungsdifferenz ist und n eine ganze Zahl darstellt: $U = n \cdot \Delta U$. Der Kehrwert der auf der rechten Seite stehenden Größe hat die Dimension einer Länge, weil dies die linke Seite fordert. Indem wir

$$\frac{4\pi\,\varepsilon_0 \Delta U}{Q_1} = \frac{1}{l} \quad \text{und} \quad \frac{Q_2}{Q_1} = k$$

setzen, erhalten wir

$$\frac{1}{r_1} - k\frac{1}{r_2} = \frac{n}{l}. \tag{3.10.21}$$

Für verschiedene ganzzahlige Werte n erhält man die einzelnen Punkte der zum konstanten Potential $n \cdot \Delta U$ gehörenden Niveaufläche, d. h. die Beziehung zwischen den Abständen r_1, r_2, die die Verbindungen mit den Ladungen $+Q_1$ und $-Q_2$ darstellen. Wird z. B. r_2 vorgegeben, so kann

$$r_1 = \frac{l r_2}{r_2 n + kl} \tag{3.10.22}$$

berechnet werden, und man kann die Potentialfläche konstruieren (Abb. 128).

Der Fall $n = 0$, also die Äquipotentialfläche $U = 0$, verdient besondere Beachtung. In diesem Fall gilt nämlich

$$\frac{r_2}{r_1} = k = \frac{Q_2}{Q_1}, \tag{3.10.23}$$

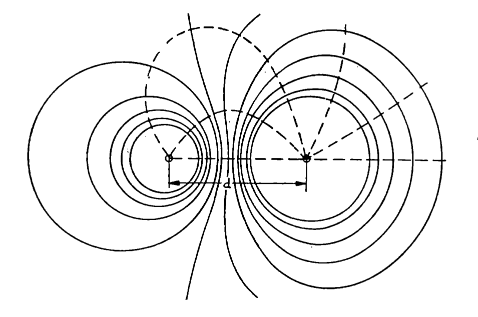


Abb. 128. Äquipotentialflächen zweier Punktladungen von verschiedenen Größen und entgegengesetzten Vorzeichen

d. h., das Verhältnis der Strahlen, die von zwei festen Punkten zu den Punkten der Äquipotentialfläche gezogen werden, ist konstant. In der Ebene bedeutet dies einen Kreis, im Raum die in Abb. 129 gezeichnete Kugel. Bei $Q_1 < Q_2$

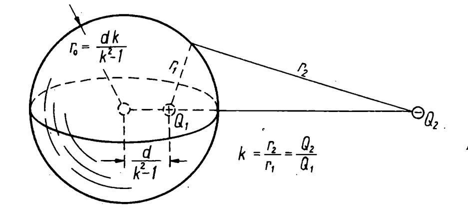


Abb. 129. Kugelförmige Äquipotentialfläche

ist $k > 1$, mithin ist die Äquipotentialfläche $U = 0$ eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt von der Ladung Q_1 nach (3.10.14) um den Wert

$$|x_0| = \frac{d}{k^2 - 1} \tag{3.10.24}$$

versetzt wurde, während ihr Halbmesser nach (3.10.13)

$$r_0 = \frac{dk}{k^2 - 1} \tag{3.10.25}$$

beträgt.

Im Feld zweier Punktladungen entgegengesetzten Vorzeichens gibt es stets eine Niveaufläche, die eine Kugelfläche ist.

Beispiele und Ergänzungen

1. Wie ist das Feld von zwei Punktladungen beschaffen, wenn beide ins Unendliche rücken? Damit das Feld nicht identisch gleich Null wird, werden die Ladungen dabei entsprechend über alle Grenzen hinaus gesteigert. Für das Potential im Punkt $P(z, r)$ gilt (Abb. 130)

$$4\pi\,\varepsilon_0 U = \frac{Q}{\varrho_1} - \frac{Q}{\varrho_2} = \frac{Q}{\sqrt{(\zeta + z)^2 + r^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(\zeta - z)^2 + r^2}}$$

$$= \frac{Q}{\zeta}\left[\frac{1}{1 + \frac{z}{\zeta}}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\zeta + z}\right)^2}} - \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\zeta - z}\right)^2}}\right].$$

Abb. 130. Feld zweier Punktladungen

Bei $\zeta \to \infty$ wird die Reihenentwicklung für kleine Größen bis zum linearen Glied vorgenommen. Es ergibt sich

$$\frac{1}{1 \pm \frac{z}{\zeta}} \approx 1 \mp \frac{z}{\zeta}; \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\zeta \pm z}\right)^2}} \approx 1;$$

$$4\pi\,\varepsilon_0 U \approx \frac{Q}{\zeta}\left(1 - \frac{z}{\zeta} - 1 - \frac{z}{\zeta}\right) = -\frac{2Qz}{\zeta^2}; \quad U \approx -\frac{Qz}{2\pi\,\varepsilon_0 \zeta^2}. \tag{3.10.26}$$

Die Äquipotentialflächen sind Ebenen, die auf der z-Achse senkrecht stehen. Die Feldstärke besitzt dann nur eine Komponente in z-Richtung und hat den Wert

$$E = -\frac{dU}{dz} = \frac{Q}{2\pi\,\varepsilon_0 \zeta^2} = E_0.$$

Die Feldstärke ist also konstant, vorausgesetzt, daß die Ladung in der Weise anwächst, daß der Grenzwert von Q/ζ^2 für $\zeta \to \infty$ endlich und konstant bleibt.

Durch diesen Grenzfall für zwei Punktladungen wird also ein homogenes Feld geliefert. Diese Art der Herstellung des homogenen Feldes wird später noch Verwendung finden.

3.10.6. *Das Feld von Dipolen und Doppelschichten*

Das Potential zweier gleichgroßer ungleichnamiger Punktladungen mit dem gegenseitigen Abstand l beträgt auf einem Punkt der nach außen verlängerten Verbindungsgeraden der beiden Ladungen (Abb. 131)

$$U = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r+l} - \frac{1}{r}\right).$$

Abb. 131. Kraftlinien und Äquipotentialflächen zweier ungleichnamiger Punktladungen

Ist l sehr klein, so kann für den Ausdruck in der Klammer auch geschrieben werden

$$\frac{1}{r+l} - \frac{1}{r} = \frac{d\frac{1}{r}}{dr}\,l.$$

Damit wird

$$U = \frac{lQ}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dr}.$$

Mit l geht auch U gegen Null. Wird dabei aber die Ladung in der Weise vergrößert, daß das Produkt lQ endlich bleibt, so erhält man in einem äußeren Punkt endliche Potentialwerte. Diese Anordnung, die über zwei einander sehr nahe liegende, große, jedoch entgegengesetzte Ladungen verfügt, wird Dipol, das Produkt

$$p = lQ$$

das Moment des Dipols genannt. Das Potential eines Dipols in einem Feldpunkt, der sich auf der Verbindungsgeraden befindet, ist damit

$$U = \frac{p}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dr}. \qquad (3.10.27)$$

Das Potential in einem Punkt außerhalb der Achse wird nach Abb. 132

$$U = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r+dr} - \frac{1}{r}\right) = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{d\frac{1}{r}}{dr}\,dr$$

und mit $dr = l\cos\alpha$

$$U = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{d\frac{1}{r}}{dr}\,l\cos\alpha = \frac{p}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{d\frac{1}{r}}{dr}\cos\alpha. \tag{3.10.28}$$

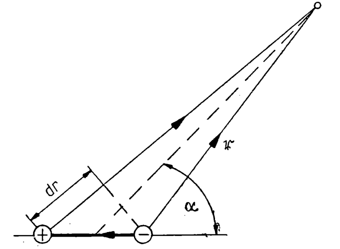


Abb. 132. Potential eines Dipols

Diese Beziehung kann aber auch folgendermaßen gedeutet werden: Das Moment des Dipols wird als ein Vektor angesehen, dessen Betrag Ql ist und der in der Dipolachse mit positiver Richtung zur positiven Ladung hinzeigt. Führt man noch den Vektor

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dr}\,\mathfrak{r}^0$$

ein, wobei $\mathfrak{r}^0$ den vom Dipol gegen den Aufpunkt zeigenden Einheitsvektor bedeutet, erhält man für das Potential eines Dipols

$$U = -\frac{\mathfrak{p}}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{d\frac{1}{r}}{dr}\,\mathfrak{r}^0 = \frac{\mathfrak{p}}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\mathfrak{r}^0}{r^2} = \frac{p}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\cos(180^\circ - \alpha)}{r^2} = \frac{p}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\cos\vartheta}{r^2}. \tag{3.10.29}$$

Der Dipol ist als ein unendlich nahe beieinander liegendes, unendlich großes ungleichnamiges Ladungspaar ein irreales, aber dennoch sehr nützliches Modell. Wir werden diesem Begriff bei unseren Rechnungen deshalb so oft begegnen, weil das Feld von einander nahe liegenden und sehr großen Ladungen in einer Entfernung, die im Vergleich zum Abstand zwischen beiden Ladungen sehr groß ist, mit Hilfe der Dipolgleichungen behandelt werden kann.

In Abb. 133 sind die Kraftlinien und die Ebenenschnitte der Äquipotentialflächen eines Dipols gezeichnet. $\mathfrak{p}$ liegt hier horizontal und ist von rechts nach links gerichtet.

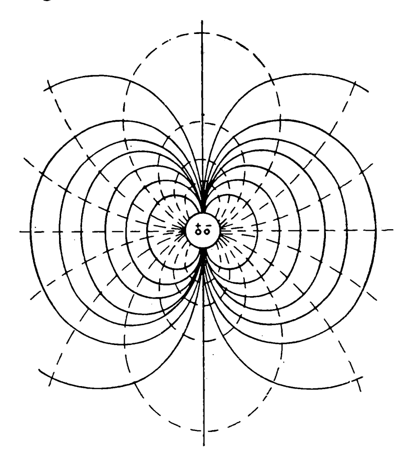


Abb. 133. Feld eines punktförmigen Dipols

Mißt man den Abstand r von dem Punkt aus, für den das Potential berechnet werden soll, und gibt mit dem Vektor $\mathfrak{r}$ den Ort des Dipols, auf diesen Punkt bezogen, an, so ändert sich in (3.10.29) nur das Vorzeichen:

$$U = \frac{\mathfrak{p}}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{d\frac{1}{r}}{dr} \mathfrak{r}^0 = -\frac{\mathfrak{p}}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{\mathfrak{r}^0}{r^2}. \tag{3.10.30}$$

Der Vektor $\frac{d\frac{1}{r}}{dr}\mathfrak{r}^0$ stellt den Neigungsverlauf der Funktion $1/r$ längs des Vektors $\mathfrak{r}$ dar, d. h. die auf die Einheitslänge entfallende größte Neigung; seine Richtung fällt dabei mit der räumlichen Richtung der größten Neigung zusammen und weist gegen die Schichtflächen mit höherem Parameterwert. Dies ist aber nichts anderes als der Gradient von $1/r$:

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dr}\mathfrak{r}^0 = \operatorname{grad}\frac{1}{r}.$$

Damit ist also das Potential des Dipols

$$U = \frac{\mathfrak{p}}{4\pi\,\varepsilon_0} \operatorname{grad}\frac{1}{r}, \tag{3.10.31}$$

worin r der vom Aufpunkt zum Dipol gezogene Fahrstrahl ist.

Beispiele und Ergänzungen

1. Das Potential von zwei sehr nahe gelegenen, mit gleichen Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens versehenen Flächenstücken, der elektrischen Doppelschicht (Abb. 134), läßt sich ähnlich berechnen. Das Moment der Doppelschicht hat den Wert $\sigma l = \tau$, seine Richtung ist die Normale

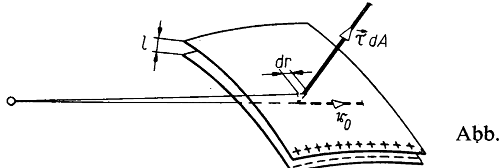


Abb. 134. Doppelschicht

der als eine Fläche betrachteten Doppelschicht, wiederum mit positivem Richtungssinn von der negativen zur positiven Ladung hin. Der Potentialwert wird in einem solchen Punkt, von dem sich das Doppelschichtelement der Fläche dA im Abstand r befindet, analog zur Gleichung (3.10.30)

$$dU = \frac{\tau\, d\mathfrak{A}}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{d\frac{1}{r}}{dr} \mathfrak{r}^0 = -\frac{\tau\, d\mathfrak{A}}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathfrak{r}^0 = -\frac{\tau\, dA}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\alpha. \tag{3.10.32}$$

$\frac{dA \cos\alpha}{r^2}$ ist der Raumwinkel $d\Omega$, unter dem die Doppelschichtfläche dA vom Aufpunkt aus zu sehen ist.

Dies gilt auch allgemein. Das Potential einer Doppelschicht, die ein beliebiges konstantes Moment τ besitzt, ist in einem Punkt des Raumes dem Raumwinkel Ω proportional, unter dem diese Fläche gesehen wird:

$$U = -\frac{\tau}{4\pi\,\varepsilon_0}\Omega.$$

Das Potentialgebirge einer Doppelschicht ist in Abb. 135 dargestellt.

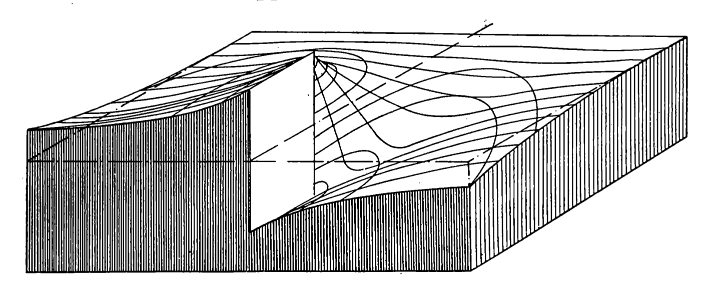


Abb. 135. Potentialgebirge einer Doppelschicht

2. Zwei unendlich lange Linien mit den Ladungen $+q$ bzw. $-q$ je Längeneinheit bilden einen *Liniendipol*, wenn ihr Abstand l in der Weise gegen Null geht, daß dabei das Dipolmoment $\mathfrak{p} = q\mathfrak{l}$ endlich bleibt. Das Potential eines Liniendipols kann nach dem bisher Gesagten leicht bestimmt werden:

$$U = \frac{\mathfrak{p}}{2\pi\,\varepsilon_0} \operatorname{grad} \ln \frac{1}{r}.$$

3.10.7. *Der Begriff des Quadrupols*

Die praktische Bedeutung des Dipolbegriffs besteht darin, daß man mit seiner Hilfe das Feld zweier gleichgroßer punktförmiger Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens in großer Entfernung leicht bestimmen kann, wenn diese im Vergleich zum Abstand beider Punktpole voneinander groß ist. Die theoretische Bedeutung besteht darin, daß hiermit eine punktförmige — d. h. in einem kleinen Raumteil untergebrachte — Ladungsanordnung gefunden wurde, bei der der Potentialverlauf von $1/r^2$ abhängt, so daß das Potential im Nullpunkt eine Singularität der Ordnung $1/r^2$ besitzt.

Vom gleichen praktischen wie theoretischen Standpunkt aus kann man auch kompliziertere Ladungsanordnungen in Betracht ziehen. Zunächst soll der Begriff des Quadrupols eingeführt werden.

Zwei Dipole, von denen der eine die Richtung der positiven z-Achse, der andere die Richtung der negativen z-Achse besitzt, sind auf der z-Achse so

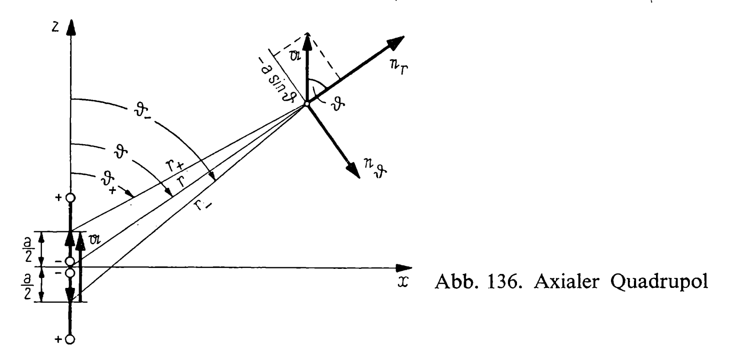


Abb. 136. Axialer Quadrupol

angeordnet, daß der Mittelpunkt des ersten bei $z = +a/2$, der des zweiten bei $z = -a/2$ liegt. Das Potential dieses „axialen Quadrupols" kann leicht berechnet werden. Es gilt nach (3.10.29) mit den Bezeichnungen der Abb. 136

$$U^{(2)} = U^{(+1)} + U^{(-1)} = \frac{aq}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\cos\vartheta_+}{r_+^2} - \frac{\cos\vartheta_-}{r_-^2}\right].$$

Für $a \ll r$ wird

$$\frac{\cos\vartheta_+}{r_+^2} - \frac{\cos\vartheta_-}{r_-^2} = -\,\mathfrak{a}\ \mathrm{grad}\left(\frac{\cos\vartheta}{r^2}\right).$$

Vergegenwärtigt man sich, daß in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) die Komponenten des Gradienten von $\cos\vartheta/r^2$ der Reihe nach lauten

$$\mathrm{grad}_r \frac{\cos\vartheta}{r^2} = \frac{d}{dr}\frac{\cos\vartheta}{r^2} = -\frac{2\cos\vartheta}{r^3},$$

$$\mathrm{grad}_\vartheta \frac{\cos\vartheta}{r^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{d\vartheta}\frac{\cos\vartheta}{r^2} = -\frac{\sin\vartheta}{r^3},$$

$$\mathrm{grad}_\varphi \frac{\cos\vartheta}{r^2} = 0$$

und die Komponenten des Vektors $\mathfrak{a}$ in demselben Koordinatensystem

$$a_r = a\cos\vartheta; \quad a_\vartheta = -\,a\sin\vartheta; \quad a_\varphi = 0,$$

so wird das Potential

$$U^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} a^2 q \frac{3}{r^3}\left[\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right].$$

Dieser Ausdruck gilt exakt, wenn a sich beliebig der Null nähert und q gleichzeitig derart wächst, daß das Produkt $a^2 q$ endlich bleibt. Die endliche Größe

$$2a^2 q = p^{(2)}$$

nennt man das Quadrupolmoment des axialen Quadrupols. Die vereinfachende Rolle des Faktors 2 wird sich später zeigen.

Das Potential des axialen Quadrupols beträgt demnach

$$U^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p^{(2)}}{2}\frac{3}{r^3}\left[\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right].$$

Der Verlauf des Potentials ist, wie die Abb. 137 zeigt, axialsymmetrisch.

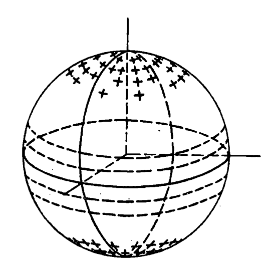


Abb. 137. Potentialverteilung eines axialen Quadrupols auf einer Kugelfläche
Der Quadrupol befindet sich im Mittelpunkt der Kugel und zeigt in die Richtung der z-Achse

Ähnlich kann der axiale Multipol n-ter Ordnung konstruiert und dessen Potential bestimmt werden. Man erhält dann für das Potential eines axialen 2^n-Poles, d. h. eines Poles der Ordnung n,

$$U^{(n)} = \frac{p^{(n)}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta).$$

Hierbei bedeutet $P_n(\cos\vartheta)$ ein Polynom n-ten Grades in $\cos\vartheta$, das sogenannte LEGENDREsche Polynom.

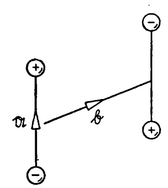


Abb. 138. Allgemeiner Quadrupol

Allgemeine Multipole zweiter Ordnung entstehen aus der Verschiebung von Dipolen in beliebiger Richtung (Abb. 138, 139, 140).

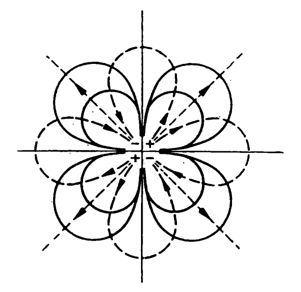


Abb. 139. Kraftlinien und Äquipotentiallinien eines Quadrupols in der xz-Ebene

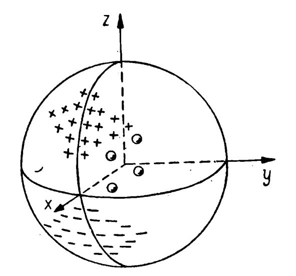


Abb. 140. Potentialverteilung des eingezeichneten Quadrupols auf einer Kugelfläche

3.10.8. *Das Feld der im Raum gleichmäßig verteilten Ladung*

Zwei ebene Flächen mit sehr großen Abmessungen seien in einem vergleichsweise sehr kleinen Abstand einander gegenüber angeordnet (Plattenkondensator). Den gesamten Raum zwischen den beiden Platten denken wir uns mit einer homogenen Ladungsdichte erfüllt (Abb. 141). Die in einem Prisma der

Höhe dx und der Einheitsgrundfläche enthaltene Ladungsmenge ist $\varrho\, dx$. Wendet man den GAUSSschen Satz auf das Prisma an, so erhält man die Ladungsbilanz

$$\left(D + \frac{dD}{dx}\,dx\right) - D = \varrho\, dx; \quad \frac{dD}{dx} = \varrho .$$

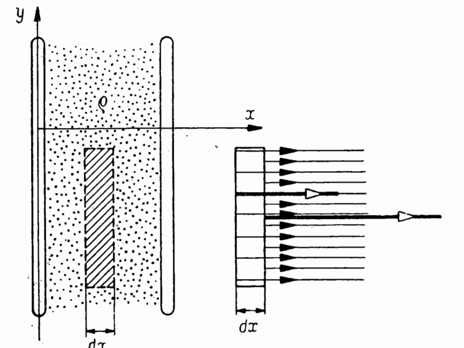


Abb. 141. Berechnung des Feldes der Raumladung

Die Zahl der Verschiebungslinien, die durch die linke Fläche des Prismas in das Prisma eintreten, ist D, die Zahl der durch die rechte Fläche austretenden Verschiebungslinien hingegen $D + \frac{dD}{dx}\,dx$. Die Abbildung zeigt, wie sich die Zahl der Verschiebungslinien beim Fortschreiten längs der positiven x-Achse vergrößert. Die Potentialdifferenz zwischen linker und rechter Deckfläche des Prismas wird dann

$$dU = -E\,dx = -\frac{D}{\varepsilon_0}\,dx .$$

Zur Bestimmung des Potentials steht demnach folgende Beziehung zur Verfügung:

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{D}{\varepsilon_0} .$$

Wird dies in die Beziehung $dD/dx = \varrho$ eingesetzt, so folgt

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{dD}{dx} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} .$$

Wenn die Ladungsdichte im ganzen Raum von den Koordinaten unabhängig, also konstant ist, läßt sich diese Gleichung einfach über x integrieren, und man

erhält nach zweimaliger Integration

$$U = -\frac{\varrho}{2\varepsilon_0} x^2 + Ax + B.$$

Damit ist der Potentialverlauf gegeben. Die Werte der Konstanten A und B werden aus den Randbedingungen bestimmt, nach denen das Potential auf beiden Platten feste Werte besitzt, und zwar sollen diese

an der Stelle $x = 0 \quad U = 0$,

an der Stelle $x = l \quad U = U_0$

sein. Werden diese Werte in die Potentialgleichung eingesetzt, erhält man für die Konstanten

$$B = 0; \quad A = \frac{U_0}{l} + \frac{\varrho}{2\varepsilon_0} l.$$

Damit wird das Potential

$$U = -\frac{\varrho}{2\varepsilon_0} x^2 + \left(\frac{U_0}{l} + \frac{\varrho}{2\varepsilon_0} l\right) x,$$

und für die Feldstärke erhält man

$$E = -\frac{dU}{dx} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} x - \left(\frac{U_0}{l} + \frac{\varrho}{2\varepsilon_0} l\right) = -\frac{U_0}{l} - \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}(l - 2x).$$

Aus der Abb. 142 geht qualitativ hervor, wie sich Spannung und Feldstärke zwischen den beiden Platten bei positiver und negativer Raumladungsdichte ändern.

Denkt man sich die Ladungsträger im Vakuum befindlich, so würden sie sich durch den Einfluß des Feldes in Bewegung setzen, und man müßte für ihren ständigen Ersatz sorgen, falls die angegebenen Potential- und Feldstärkenverhältnisse stationär sein sollen. Man könnte dies umgehen, wenn man sich die existierende Raumladung durch einen Isolator an den Ort gebunden denkt.

Für den geschilderten Fall eignet sich dieses Verfahren unseres Erachtens recht gut; wir erkennen aber nicht, wie sich diese Lösung in die Lösungen des allgemeinen Falles einfügt. Deshalb soll jetzt die Lösung des allgemeinen Falles geschildert werden, und wir werden feststellen, daß die vorstehend angewandte Methode einen Spezialfall des allgemeinen Verfahrens darstellt.

Offenbar ist die Gleichung

$$E = -\frac{dU}{dx} = E_x$$

nichts anderes als die Anwendung der Beziehung

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U$$

auf den eindimensionalen Fall. Die Gleichung

$$\frac{dD}{dx} = \frac{dD_x}{dx} = \varrho$$

folgt hingegen ganz ähnlich aus der allgemein gültigen Beziehung

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho .$$

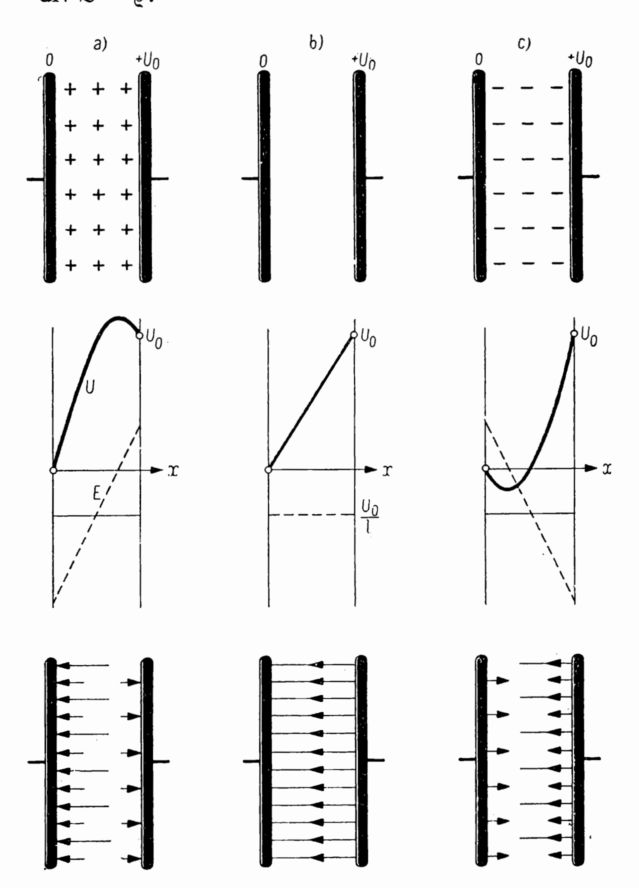


Abb. 142. Feldstärke und Spannung
a) bei positiver Raumladung, b) bei Raumladung gleich Null, c) bei negativer Raumladung

Beispiele und Ergänzungen

1. Eine Metallkugel mit dem Radius r_0 sei mit der Ladung Q versehen. Welche räumliche Ladungsdichte gibt im Außenraum überall eine ortsunabhängige Feldstärke von konstanter Größe?

Wir wenden den GAUSSschen Satz auf die Kugel mit dem Radius r an:

$$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi\, r^2 = Q + \int_{r_0}^{r} \varrho(r) \cdot 4\pi\, r^2\, dr,$$

$$\varepsilon_0 E = \frac{Q}{4\pi\, r^2} + \frac{1}{r^2} \int_{r_0}^{r} \varrho(r)\, r^2\, dr.$$

Die Forderung der Ortsunabhängigkeit wird durch

$$\frac{Q}{4\pi\, r^2} + \frac{1}{r^2} \int_{r_0}^{r} \varrho(r)\, r^2\, dr = k$$

befriedigt, wobei k eine aus dieser Gleichung zu berechnende Konstante ist. Es sei nämlich $r = r_0$; dann ist das Integral Null, also

$$k = \frac{Q}{4\pi\, r_0^2} = \sigma.$$

Um $\varrho(r)$ zu bestimmen, bringen wir unsere vorherige Gleichung in die Form

$$\int_{r_0}^{r} \varrho(r)\, r^2\, dr = -\frac{Q}{4\pi} + kr^2.$$

Differenzieren wir beide Seiten, so erhalten wir

$$\varrho(r)\, r^2 = 2kr$$

oder

$$\varrho(r) = \frac{2k}{r} = \frac{2\sigma}{r}.$$

2. Es sind die Potentialverhältnisse einer homogen geladenen Scheibe zu untersuchen (vgl. Abb. 97, S.97).

Das durch ein Flächenelement gegebene Potential beträgt

$$d^2 U = \frac{2\sigma}{4\pi\, \varepsilon_0} \frac{r\, dr\, d\varphi}{R}.$$

Die Integration über φ liefert 2π. Damit wird das von einem elementaren Ring der Breite dr erzeugte Potential

$$dU = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{r\, dr}{\sqrt{r^2 + z^2}},$$

und daraus errechnet man

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^{r_0} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+r_0^2} - z\right],$$

was dem vorherigen Ergebnis entspricht.

Das Potential im Mittelpunkt kann auch durch die Gesamtladung $Q = 2r_0^2\,\pi\sigma$ ausgedrückt werden:

$$U_0 = \frac{\sigma r_0}{\varepsilon_0}\,\frac{2\pi\,r_0}{2\pi\,r_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0\,\pi r_0}.$$

Man spricht stets vom Potential des Mittelpunktes, nicht vom Potential der Scheibe, weil eine (nichtleitende) Scheibe mit konstanter Ladungsdichte keine Äquipotentialfläche sein kann. Eine eingehende Rechnung zeigt, daß bei einer mit der Gesamtladung Q versehenen Metallplatte, die an ihrer Oberfläche eine konstante Spannung aufweist, die Flächenladungsdichte von r abhängt:

$$\sigma_M = \frac{Q}{4\pi r_0}\,\frac{1}{\sqrt{r_0^2 - r^2}}.$$

Das Flächenpotential ist hier

$$U_M = \frac{Q}{8\varepsilon_0 r_0}.$$

Dies ist der $4/\pi$-te Teil des Mittelpunktpotentials einer nichtleitenden Scheibe. Für die Metallscheibe ist die Feldstärke längs der z-Achse (Abb. 143)

$$E_M = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{z^2 + r_0^2},$$

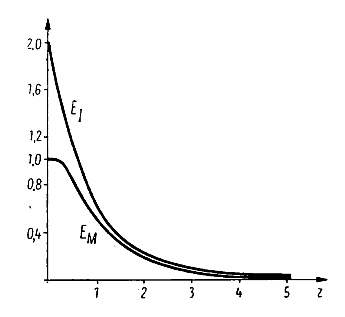


Abb. 143. Feldstärke einer Metallscheibe und einer nichtleitenden Scheibe

für die Isolatorscheibe

$$E_I = \frac{Q}{2\varepsilon_0 r_0^2 \pi}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + r_0^2}}\right).$$

Auf der Scheibenfläche im Mittelpunkt wird

für den Leiter $E_{M_0} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}$,

für den Isolator $E_{I_0} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r_0^2}$.

Die Feldstärke ist also auf einer isolierenden Scheibe doppelt so groß wie auf einer Metallscheibe.

3.11. Grundgesetze des elektrostatischen Feldes

Unser Ausgangspunkt war das COULOMBsche Gesetz

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_V \frac{\varrho}{r^2}\,\mathfrak{r}_0\,dV. \tag{3.11.1}$$

Als Erfahrungstatsache erhielten wir auch das Gesetz

$$\oint_L \mathfrak{E}\,d\mathfrak{l} = 0, \tag{3.11.2}$$

welches besagt, daß das elektrische Feld wirbelfrei ist.

Der GAUSSsche Satz der Elektrotechnik wurde wieder als empirisch gegeben angenommen. Er lautet

$$\oint_A \mathfrak{D}\,d\mathfrak{A} = \int_V \varrho\,dV. \tag{3.11.3}$$

Die Gleichung (3.11.2) kann mit Hilfe des STOKESschen Satzes umgeformt werden:

$$\oint_L \mathfrak{E}\,d\mathfrak{l} = \int_A \operatorname{rot}\mathfrak{E}\,d\mathfrak{A} = 0, \tag{3.11.4}$$

während Gleichung (3.11.3) mit Hilfe des GAUSSschen Satzes der Vektoranalysis in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\oint_A \mathfrak{D}\,d\mathfrak{A} = \int_V \operatorname{div}\mathfrak{D}\,dV = \int_V \varrho\,dV. \tag{3.11.5}$$

Da (3.11.4) und (3.11.5) für eine beliebige Fläche bzw. ein beliebiges Volumen gültig sind, kann gefolgert werden

$$\oint_L \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = 0 \to \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \tag{3.11.6}$$

$$\oint_A \mathfrak{D}\, d\mathfrak{A} = \int_V \varrho\, dV \to \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho. \tag{3.11.7}$$

Diese Gleichungen nennt man die *Grundgleichungen der Elektrostatik in differentieller Form*, während die Gleichungen (3.11.2) und (3.11.3) die *Grundgleichungen in integraler Form* heißen.

Die Grundgleichungen (3.11.1), (3.11.2), (3.11.3) oder (3.11.1), (3.11.6), (3.11.7) sind nicht unabhängig voneinander. Im luftleeren Raum (Vakuum) besteht die folgende logische Äquivalenz:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_V \frac{\varrho}{r^2}\,\mathfrak{r}_0\, dV \rightleftarrows \begin{cases} \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \\ \operatorname{div} \mathfrak{E} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon_0}. \end{cases}$$

Die „natürliche“ Aufgabe der Elektrostatik kann folgendermaßen formuliert werden: Es seien die Ladungen $Q_1, \ldots, Q_n$ oder die Ladungsverteilung $\varrho(\mathfrak{r})$ gegeben. Gesucht wird das zugehörige elektrische Feld.

In der Praxis haben die Probleme meist etwas andere Form: Es sind die geometrische Anordnung der (metallischen) Elektroden und deren Spannungen gegeben. Gesucht wird das entsprechende elektrische Feld. Meistens existieren keine Ladungen im Raum zwischen den Elektroden, nur auf deren Oberfläche. Die Verteilung dieser Oberflächenladungen ist aber *nicht* vorgegeben, sondern muß erst nachträglich, eben aus dem Feldbild, bestimmt werden.

Wir formulieren also die praktische Aufgabe der Elektrotechnik:

Gesucht wird die Lösung der Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$$

in einem Raumgebiet, wenn die Potentialwerte auf der Begrenzungsfläche gegeben sind.

Durch die Annahme

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U \tag{3.11.8}$$

wird die Gleichung $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$ identisch erfüllt. Für die Bestimmung der Potentialfunktion U haben wir die andere Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0.$$

Der Ausdruck $\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U$ wird LAPLACEscher Ausdruck genannt. In kartesischen Koordinaten lautet er ausgeschrieben

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{3.11.9}$$

Die elektrostatische Grundaufgabe erhält damit folgende Form:

Gesucht wird die Lösung der LAPLACEschen Gleichung

$$\Delta U = 0 \tag{3.11.10}$$

in einem Raumgebiet, wenn U auf der Begrenzungsfläche des Gebietes gegeben ist.

Wir haben also eine partielle Differentialgleichung mit vorgeschriebenen Randbedingungen zu lösen. Mit den allgemeinen Lösungsmethoden dieser Gleichungen beschäftigt sich die theoretische Elektrotechnik. Wir wollen in den folgenden Abschnitten einige einfache Methoden anführen, die in der Mehrzahl der in der Praxis auftretenden Fälle ausreichen.

Ist eine Ladungsdichte vorhanden, so lauten die Grundgleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho, \quad \mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}.$$

Mit $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U$ geht die zweite dieser Gleichungen in die kompliziertere LAPLACE-POISSONsche Differentialgleichung

$$\Delta U = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \tag{3.11.11}$$

über. Für den einfachsten Fall haben wir dieses Problem bereits in Abschnitt 3.10.8 gelöst.

Beispiele und Ergänzungen

1. Wir untersuchen im folgenden die Frage, wie aus dem COULOMBschen Gesetz

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int \frac{\varrho}{r^2}\, \mathfrak{r}_0 \, dV \tag{3.11.12}$$

die Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

folgen.

Die Gleichung (3.11.12) kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}_P \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int \frac{\varrho}{r}\, dV_Q.$$

Man kann nämlich die Gradientbildung und Integration vertauschen, da die eine Operation in bezug auf den Aufpunkt P, die andere über den laufenden Punkt Q vorzunehmen ist. Dabei ist zu beachten, daß

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{r}_0}{r^2}$$

ist. Da sich $\mathfrak{E}$ als Gradient eines Skalars erweist, gilt

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0.$$

Bilden wir die Divergenz der beiden Seiten von Gleichung (3.11.12), so wird

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int \varrho \operatorname{div}_P \frac{\mathfrak{r}_0}{r^2}\, dV_Q.$$

Das Vektorfeld $\mathfrak{r}_0/r^2$ hat nur im Aufpunkt P, wo $r = 0$ ist, eine von Null verschiedene Divergenz:

$$\lim_{Q\to P} \int \operatorname{div}_P \frac{\mathfrak{r}_0}{r^2}\, dV_Q = 4\pi.$$

Damit wird

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\, \bar{\varrho} \int_{Q\to P} \operatorname{div}_P \frac{\mathfrak{r}_0}{r^2}\, dV_Q,$$

wobei $\bar{\varrho}$ den Mittelwert über das Integrationsgebiet bedeutet. Beim Grenzübergang, wenn das Integrationsgebiet auf den Punkt P zusammenschrumpft, geht $\bar{\varrho}$ in $\varrho(P)$ über. Es gilt also

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\, \varrho \cdot 4\pi = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}.$$

Damit ist der Weg zur Herleitung der Gleichungen $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$, $\operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho/\varepsilon_0$ aus der Gleichung (3.11.12) skizziert.

Wenn wir umgekehrt die Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

als gültig annehmen, können wir auf folgende Weise zum COULOMBschen Gesetz gelangen:

Die Gleichung rot $\mathfrak{E} = 0$ wird bekanntlich durch $\mathfrak{E} = -\text{grad}\, U$ befriedigt, wobei für U nach (3.11.11) die LAPLACE-POISSONsche Gleichung

$$\Delta U = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$$

besteht. Die Lösung dieses mathematischen Problems lautet

$$U = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta U}{r}\, dV = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{\varrho}{r}\, dV.$$

Durch Gradientenbildung folgt

$$\mathfrak{E} = -\text{grad}\, U = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_V \text{grad}_P \frac{\varrho}{r}\, dV_Q$$

$$= \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_V \frac{\varrho}{r^2}\, \mathfrak{r}_0\, dV,$$

und dies ist gerade das COULOMBsche Gesetz.

2. Die Potentialfunktion hat im ladungsfreien Raum einige sehr interessante Eigenschaften. Es sei z.B. ein beliebiger Raumpunkt P von einer Kugelfläche umgeben (Abb. 144a). Dann kann man zeigen, daß der über die Kugelober-

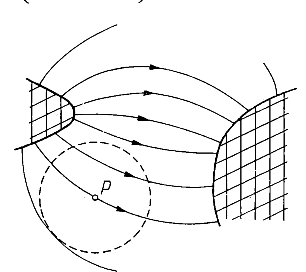


Abb. 144a. Der Mittelwert des Potentials auf der Kugelfläche ist gleich dem Potential im Punkt P

fläche gemittelte Wert der Potentialfunktion genau gleich dem Potentialwert im Mittelpunkt P der Kugel ist.

Der Mittelwert ist

$$\overline{U} = \frac{1}{4\pi\, r^2}\int_K U\, dA = \frac{1}{4\pi\, r^2}\int_K U r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega U\, d\Omega,$$

wobei $d\Omega$ den Raumwinkel des Flächenelements dA bedeutet. Untersuchen wir nun, wie dieser Wert vom Radius r der Kugel abhängt. Dazu bilden wir

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial r} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial U}{\partial r}\, d\Omega = \frac{1}{4\pi\, r^2}\int \frac{\partial U}{\partial r}\, r^2\, d\Omega = \frac{1}{4\pi\, r^2}\int \frac{\partial U}{\partial r}\, dA.$$

Da $-\partial U/\partial r$ die zur Fläche senkrechte Komponente der Feldstärke darstellt, wird

$$-\int \frac{\partial U}{\partial r} dA = \int \mathfrak{E}\, d\mathfrak{A} = \int \operatorname{div} \mathfrak{E}\, dV = \int \frac{\varrho}{\varepsilon}\, dV = 0,$$

weil nach Voraussetzung im untersuchten Raumgebiet keine Ladungen vorhanden sind.

Damit folgt $\partial \bar{U}/\partial r = 0$, d. h., der Mittelwert ist von r unabhängig. Konvergiert nun r gegen Null, schrumpft also die Kugelfläche auf den Punkt P zusammen, so wird der Mittelwert identisch mit dem Potentialwert im Punkt P:

$$\bar{U} = U(P).$$

3. Aus der soeben bewiesenen Tatsache folgt sofort ein anderer, noch wichtigerer, schon einmal erwähnter Satz: *Die Potentialfunktion kann im ladungsfreien Raum in keinem Punkt ein Maximum oder Minimum besitzen.* Andernfalls könnte nämlich auf einer um diesen Punkt gezeichneten Kugelfläche der Mittelwert nur größer oder kleiner als der Maximal- bzw. Minimalwert sein.

Ist also irgendwo $\mathfrak{E} = 0$ oder, was damit gleichbedeutend ist,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

so kann dort nur labiles Gleichgewicht bestehen.

Bei ebenen Potentialfeldern können die Potentialverhältnisse in der Umgebung eines solchen Punktes durch eine Sattelfläche veranschaulicht werden (Abb. 144b).

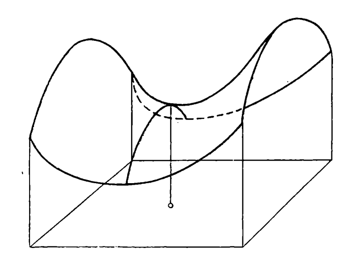


Abb. 144b. Labiles Gleichgewicht im elektrostatischen Feld

4. Wir haben schon öfters die prinzipielle Bedeutung der Meßvorschriften betont. Jetzt wollen wir eine Methode zur Messung des Verschiebungsvektors $\mathfrak{D}$ angeben.

Werden gemäß Abb. 144c zwei sich berührende Metallplatten senkrecht zu den Verschiebungslinien aufgestellt, so ändert sich das Bild des Kraftfeldes

dadurch nicht. Infolge der Influenz erhält man auf der linken Metallplatte negative Ladungen. Wendet man den GAUSSschen Satz auf die in der Abbildung angedeutete geschlossene Fläche an, erhält man $D = \sigma$.

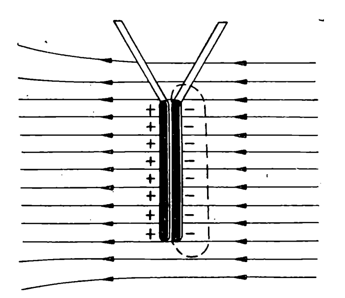


Abb. 144c. Messung des Verschiebungsvektors

Trennt man die beiden Metallplatten und führt sie aus dem Feld heraus, so können die Ladung einer der Platten und ihre Fläche gemessen werden. Damit erhält man den Betrag des Verschiebungsvektors D am Ort der Ladungstrennung.

Das eben beschriebene Meßprinzip wird in der Praxis bei der Feldmühle (Abb. 144d) angewendet, mit dem der Wert von D unmittelbar, der

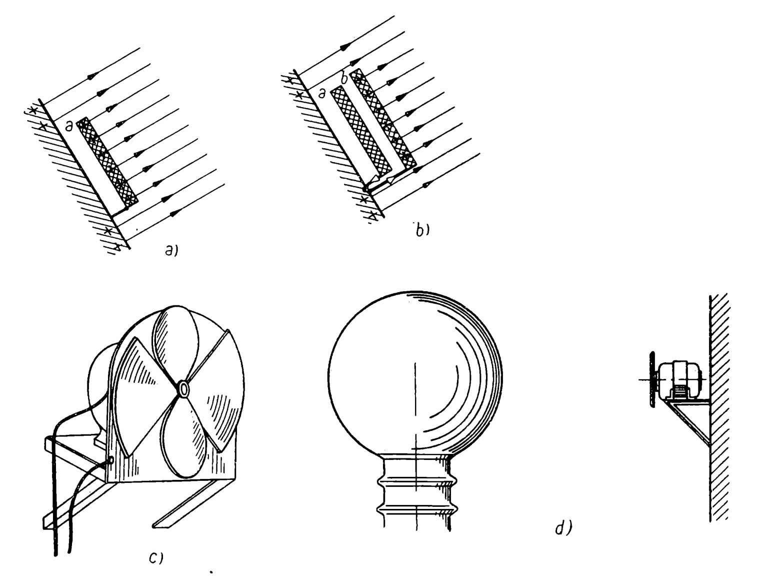


Abb. 144d. Feldmühle
a) Die Kraftlinien treten aus der Platte a aus.
b) Durch die Platte b wird Platte a abgeschirmt: Die Ladungen strömen zur Platte b.
c) Die Platte b wird durch einen Motor gedreht.
d) Anordnung zur Messung sehr hoher Spannungen.

Wert von U mittelbar gemessen werden kann. Legt man über eine Metallplatte, die durch eine Leitung mit einer Elektrode verbunden ist, an der sie isoliert aufliegt, eine zweite, ebenfalls mit der Elektrode verbundene Metallplatte, so werden die Kraftlinien in diesem Fall aus der zweiten Metallplatte austreten, da sie durch die leitende Verbindung – im Beispiel positiv – aufgeladen ist. Nimmt man nun diese Metallplatte fort, so werden Ladungen auf die erste Platte zurückfließen. Werden diese Manipulationen schnell genug vorgenommen, erhält man in der Verbindungsleitung einen gut meßbaren Wechselstrom, durch den unmittelbar D und mittelbar E geliefert werden. Bei gegebener Anordnung kann darüber hinaus aus dem Wert von E auf die das Feld erzeugende Hochspannung geschlossen werden.

3.12. Berechnung des Kraftfeldes bei gegebener Form und Spannung der Äquipotentialflächen

Die meisten Aufgaben in der Praxis lauten: Zwei oder mehr Metallelektroden sind an verschiedene Spannungen gelegt; es ist das zwischen ihnen herrschende elektrische Kraftfeld zu bestimmen.

Metallflächen sind Äquipotentialflächen, weil die Kraftlinien senkrecht aus ihnen austreten. Ladungen befinden sich nur auf den Oberflächen, doch sind Größe und Dichteverteilung unbekannt und können nur dann bestimmt werden, wenn das Feld bekannt ist. Bisher gingen wir bei unseren Berechnungen stets von der Ladung bzw. der Ladungsverteilung aus. Dieser Methode kann man sich aber hier nicht mehr bedienen, zumindest nicht unmittelbar. Mit Hilfe des folgenden allgemeinen Satzes lassen sich jedoch die Ergebnisse der bisherigen Lösungsmethode, aus verschiedenen Ladungsverteilungen das Kraftfeld zu bestimmen, zur Lösung der oben erwähnten praktischen Aufgaben verwenden. Dieser Satz lautet:

Denkt man sich im elektrostatischen Kraftfeld den Innenraum (oder Außenraum) einer geschlossenen Niveaufläche vollständig mit Metall ausgefüllt und die Metallfläche auf das Potential der Niveaufläche gebracht, so wird dadurch im äußeren (oder im inneren) Kraftfeld keinerlei Änderung bewirkt.

Wird nämlich gemäß Abb. 145 eine Niveaufläche durch eine geometrisch gleiche Metallfläche ersetzt, so wird auf deren einer Seite durch die dort eintretenden Kraftlinien eine negative, auf deren anderer Seite durch die ausgehenden Kraftlinien eine gleichgroße positive Ladung influenziert. Da die von der Ladung $+Q$ ausgehenden Verschiebungslinien der Anzahl $+Q$, die im Innern der geschlossenen Fläche verlaufen, alle an der Ladung $-Q$ enden, setzt sich das ganze Feld aus zwei Teilfeldern zusammen: einmal aus dem Feld der inneren Ladung $+Q$ und der auf den Innenwänden der Metallfläche

erzeugten Ladung $-Q$, zum andern aus dem Feld der influenzierten Ladung $+Q$, die sich auf dem Äußeren der Metallfläche befindet. Im Innern der Äquipotentialfläche entsteht durch diese Ladung, zusammen mit den im äußeren Raum befindlichen Ladungen, ein Nullfeld. Auf eine im Flächeninneren

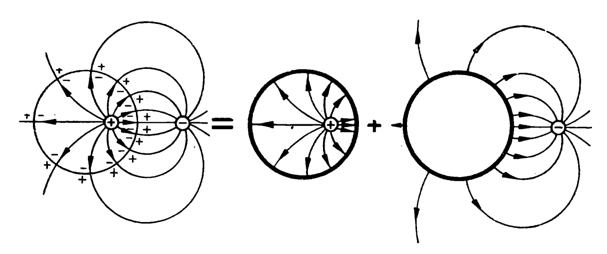


Abb. 145. Niveaufläche durch eine Metallfläche ersetzt

untergebrachte Ladung, etwa auf ein Metallelektron, wirkt also kein Feld. Dann kann auch der ganze Raum mit Metall ausgefüllt werden. Für alle Punkte der Metalloberfläche besteht zwischen der Flächenladungsdichte und der Zahl der Verschiebungslinien D nach 3.9. die schon oft benutzte Beziehung

$$D = \sigma,$$

und die Gesamtladung Q ergibt sich aus

$$Q = \oint \mathfrak{D}\, d\mathfrak{A} = \int \sigma\, dA .$$

Das Potential der Metallfläche wird der ursprüngliche, für den Ort zuständige Potentialwert sein.

Der rein mathematische Beweis der Richtigkeit dieses Verfahrens ist mit Hilfe des auch physikalisch uneingeschränkt gültigen Eindeutigkeitssatzes möglich. Sind die Form der Elektroden, d. h. die Form der Äquipotentialflächen, sowie deren Potential gegeben, so kann die Aufgabe nachweisbar eindeutig gelöst werden. Es liegt ein einziges Kraftfeld vor, das im Zwischenraum der Elektroden quellenfrei ist und dessen Potential den gegebenen konstanten Wert auf den vorgeschriebenen Flächen annimmt. Findet man also in irgendeiner Weise ein Feld, das diese Bedingungen erfüllt, so ist dies das einzige mögliche Feld, und die Lösung der Aufgabe wird durch dieses gegeben. Wenn man eine Niveaufläche durch eine Metallfläche ersetzt, so ist das äußere Feld tatsächlich ein quellenfreies Potentialfeld, dessen Potential den vorgeschriebenen Wert auf der Elektrodenfläche annimmt. Naturgemäß läßt sich in solchen Fällen nur das Potential vorgeben, das jene Fläche in ihrem ursprünglichen Feld tat-

sächlich annimmt. Dies ist aber, wie sich herausstellen wird, keine allzu große Einschränkung, weil dieses Potential durch Änderung der Ladung Q als freier Parameter leicht hergestellt werden kann.

Mit Hilfe dieses Verfahrens lassen sich die Kraftfelder zweier konzentrischer Kugeln oder Zylinder (Abb. 146) direkt angeben.

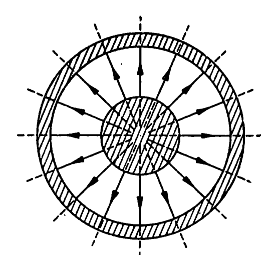


Abb. 146. Kraftfeld zwischen zwei konzentrischen Kugeln

Zwischen konzentrischen, mit ungleichnamigen Ladungen Q versehenen Kugeln besteht die Spannung

$$U = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}\right) = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{r_a - r_i}{r_a r_i}. \tag{3.12.1}$$

Der Wert der Feldstärke im Abstand r vom Mittelpunkt beträgt

$$E = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2},$$

ihre Richtung ist radial. Ist nicht die Ladung, sondern (wie in der Praxis allgemein üblich) die Spannungsdifferenz zwischen den Kugeln gegeben, so läßt sich die Feldstärke auch mit deren Hilfe ausdrücken. Da

$$\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0} = \frac{r_a r_i}{r_a - r_i}\,U$$

ist, wird

$$E = U\,\frac{r_a r_i}{r_a - r_i}\,\frac{1}{r^2}. \tag{3.12.2}$$

Die Feldstärke erreicht ihren Höchstwert auf der inneren Kugeloberfläche. Dort liegen die Kraftlinien am dichtesten:

$$E_i = U\,\frac{r_a}{r_i(r_a - r_i)}. \tag{3.12.3}$$

Werden Spannung und Außenradius konstant gehalten, der Innenradius jedoch variiert, so ändert sich auch der Wert von E_i. Macht man den Innen-

radius ständig kleiner, so gelangt man mit guter Näherung zum Feld einer einzelnen Kugel, deren Feldstärke auf der Oberfläche gemäß der Beziehung $E = U/r_i$ zunimmt. Nähert man dagegen den Radius der inneren Kugel dem der äußeren Kugel, so besitzen die Krümmungen keinen erheblichen Einfluß mehr, und man gelangt schließlich zum Kraftfeld eines Plattenkondensators, dessen Feldstärke mit $E = U/(r_a - r_i)$ stetig zunimmt, falls r_i sich r_a beliebig nähert. Da die Feldstärke sowohl bei sehr kleinen als auch bei sehr großen Radien – jeweils aus verschiedenen Gründen – große Werte annimmt, kann man erwarten, daß sie in einem Zwischengebiet durch ein Minimum geht. Nach (3.12.3) wird E_i als Funktion von r_i dort ihren kleinsten Wert besitzen, wo der Nenner sein Maximum hat.

Aus

$$\frac{d}{dr_i} r_i(r_a - r_i) = r_a - 2r_i = 0$$

folgt

$$r_{io} = r_a/2.$$

Durch nochmalige Differentiation kann man sich davon überzeugen, daß das Extremum tatsächlich ein Maximum ist. Nach Einsetzen von $r_{io} = r_a/2$ folgt für den Minimalwert der Feldstärke

$$E_{io} = 2U/r_{io}.$$

Zwischen koaxialen Zylindern, die je Längeneinheit mit der Ladung q entgegengesetzten Vorzeichens belegt wurden, ist die Spannung

$$U = \frac{q}{2\pi\,\varepsilon_0} \ln\frac{r_a}{r_i}. \tag{3.12.4}$$

Der Feldstärkewert beträgt im Abstand r vom Mittelpunkt

$$E = \frac{q}{2\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{U}{\ln\frac{r_a}{r_i}}\frac{1}{r}.$$

Die Feldstärke besitzt ein Minimum an einer Stelle r_{i0}. Die Rechnung liefert dafür

$$\frac{d}{dr_i}\left[r_i \ln\frac{r_a}{r_i}\right] = \ln\frac{r_a}{r_i} - r_i\frac{1}{r_i} = 0,$$

$$\ln\frac{r_a}{r_i} = 1; \quad r_{i0} = \frac{r_a}{\mathrm{e}},$$

$$E_{i0} = \frac{U}{r_{i0}}.$$

Formal ist dieser Ausdruck der Beziehung $E = U/d$ des Plattenkondensators ähnlich, beinhaltet aber natürlich ganz etwas anderes.

Beispiele und Ergänzungen

1. Legt man an zwei konzentrische Kugeln die Spannung U_0, so wird die größte bzw. die kleinste Feldstärke auf der Innenkugelfläche bzw. auf der Außenkugelfläche auftreten:

$$E_i = U_0 \frac{r_a}{r_i(r_a - r_i)}; \quad E_a = U_0 \frac{r_i}{r_a(r_a - r_i)}.$$

Das Verhältnis der beiden Feldstärken ist ein Maß für die Inhomogenität des Feldes:

$$\eta = \frac{E_i}{E_a} = \left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2.$$

Diese oftmals unerwünschte Inhomogenität kann verringert werden, wenn man zwischen die beiden Kugeln eine dritte Kugel mit bestimmtem Potential legt. Die Kugel habe den Radius r_1 und das Potential U_1 und liege in der Mitte zwischen den beiden ursprünglichen Kugeln, so daß

$$r_1 = r_i + \frac{r_a - r_i}{2} = \frac{r_a + r_i}{2}$$

ist. U_1 soll so gewählt werden, daß die Feldstärke E_1 auf der Außenfläche der Kugel mit dem Radius r_1 gleich der Feldstärke E_i auf der Innenkugel ist. Erhält die Außenkugel noch das Potential Null, dann ist das der Innenkugel gleich U_0.

Für U_1 gilt die Gleichung

$$U_1 \frac{r_a}{r_1(r_a - r_1)} = (U_0 - U_1) \frac{r_1}{r_i(r_1 - r_i)}$$

oder, nach Umformung,

$$U_1 \left[\frac{r_a}{r_1(r_a - r_1)} + \frac{r_1}{r_i(r_1 - r_i)}\right] = U_0 \frac{r_1}{r_i(r_1 - r_i)}.$$

Wird der Wert von r_1 eingesetzt, so erhält man

$$U_1 \left[\frac{4r_a}{(r_i + r_a)(r_a - r_i)} + \frac{r_a + r_i}{r_i(r_a - r_i)}\right] = U_0 \frac{r_a + r_i}{r_i(r_a - r_i)},$$

$$U_1 = U_0 \frac{(r_a + r_i)^2}{(r_a + r_i)^2 + 4r_a r_i} < U_0.$$

Für die maximale Feldstärke errechnet man

$$E_{\max} = E_i = E_1 = U_1 \frac{r_a}{r_1(r_a - r_1)} = U_0 \frac{4r_a}{(r_a + r_i)^2 + 4r_a r_i} \frac{r_a + r_i}{r_a - r_i}.$$

Für das Verhältnis dieser Feldstärke zu der maximalen Feldstärke, die auftritt, wenn keine Zwischenkugel vorhanden ist, errechnet man leicht

$$\frac{E_{\max}}{E_{i0}} = \frac{4r_i}{(r_a + r_i)^2 + 4r_a r_i}(r_a + r_i) < 1,$$

d. h., daß die ursprüngliche Inhomogenität verringert worden ist (Abb. 147).

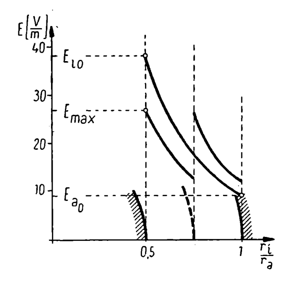


Abb. 147. Homogenisierung eines Kugelfeldes

Die relativen Feldstärkeschwankungen zwischen Maximal- und Minimalwert betragen im äußeren bzw. inneren Kugelkondensator

$$\eta_a = \left(\frac{r_a}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{2r_a}{r_a + r_i}\right)^2,$$

$$\eta_i = \left(\frac{r_1}{r_i}\right)^2 = \left(\frac{r_a + r_i}{2r_i}\right)^2.$$

Beide Werte sind kleiner als das Verhältnis η ohne Feldunterteilung.

Ist insbesondere $r_a = 2r_i$, so werden

$$U_1 = 0{,}53\, U_0, \quad \eta = 4;$$

$$\frac{E_{\max}}{E_{i0}} = 0{,}705, \quad \eta_a = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1{,}79, \quad \eta_i = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25.$$

Wird die Zahl der Unterteilungen immer größer gemacht, so wird das Feld praktisch homogen, die Feldstärke nimmt den mittleren Wert

$$E_h = \frac{U_0}{r_a - r_i}$$

an, und das Verhältnis der relativen Feldstärkeschwankungen nähert sich

$$\eta_a = 1.$$

Die „unendlich dicht“ angeordneten Flächenladungsdichten stellen nämlich eine Raumladung dar.

2. Wird an zwei koaxiale Zylinder (Abb. 148) die Spannung U_0 gelegt, so ist die maximale Feldstärke

$$E_i = \frac{U_0}{r_i \ln \frac{r_a}{r_i}},$$

die minimale Feldstärke

$$E_a = \frac{U_0}{r_a \ln \frac{r_a}{r_i}}$$

und deren Verhältnis

$$\eta = \frac{E_i}{E_a} = \frac{r_a}{r_i}.$$

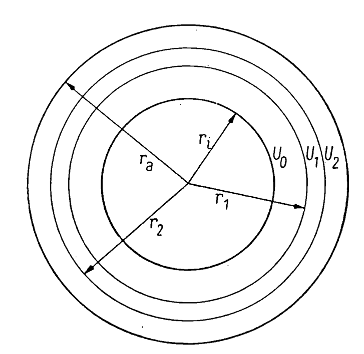


Abb. 148. Homogenisierung des Feldes koaxialer Zylinder

Die Feldverteilung soll mit Hilfe zweier koaxialer Zylinder gleichmäßiger gestaltet werden. Die Radien der Zylinder seien r_1 bzw. r_2 ($r_2 > r_1$), ihre auf den äußeren Zylinder bezogenen Potentiale U_1 bzw. U_2. Die Radien und Potentiale sind so zu bestimmen, daß sowohl

a) die Maximalfeldstärken als auch

b) die relativen Feldstärkeschwankungen und damit auch die Minimalfeldstärken gleich sind (Abb. 149).

Die Bedingung b) lautet

$$\frac{r_a}{r_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1}{r_i} = a.$$

Abb. 149. Feldstärkeverlauf

Daraus folgt

$$r_2 = \frac{r_1^2}{r_i}; \quad r_1 = \frac{r_2^2}{r_a} = \frac{r_1^4}{r_a r_i^2}; \quad r_1 = \sqrt[3]{r_a r_i^2}; \quad r_2 = \sqrt[3]{r_a^2 r_i};$$

$$a = \frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{\frac{r_a^2 r_i}{r_a r_i^2}} = \sqrt[3]{\frac{r_a}{r_i}}.$$

Aus der Bedingung a) folgt

$$\frac{U_0 - U_1}{r_i \ln \frac{r_1}{r_i}} = \frac{U_1 - U_2}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{U_2}{r_2 \ln \frac{r_a}{r_2}}.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit r_i bzw. r_1, so erhält man

$$\frac{U_0 - U_1}{\ln \frac{r_1}{r_i}} = -\frac{U_2 - U_1}{\frac{r_1}{r_i} \ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad -\frac{U_2 - U_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{U_2}{\frac{r_2}{r_1} \ln \frac{r_a}{r_2}}.$$

Bei Berücksichtigung der Grundgleichung der Bedingung b) wird daraus

$$\frac{U_0 - U_1}{\ln a} = \frac{U_1 - U_2}{a \ln a}; \quad \frac{U_1 - U_2}{\ln a} = \frac{U_2}{a \ln a},$$

und man erhält schließlich

$$U_2 = (1 + a)\, U_1 - aU_0; \quad aU_1 = (1 + a)\, U_2;$$

$$U_1 = \frac{(1 + a)^2}{a} U_1 - (1 + a)\, U_0; \quad U_1 = \frac{1 + a}{(1 + a)^2 - a} aU_0;$$

$$U_2 = \frac{a}{1 + a} U_1 = \frac{a^2}{(1 + a)^2 - a} U_0.$$

Die Maximalfeldstärken sind

$$E_{\max} = \frac{U_2}{r_2 \ln \frac{r_a}{r_2}} = \frac{U_0}{r_2} \frac{a^2}{(1 + a)^2 - a} \frac{1}{\ln a} = \frac{U_0}{r_i \ln a} \frac{1}{(1 + a)^2 - a}$$

und die Verhältnisse

$$\eta = a = \sqrt[3]{\frac{r_a}{r_i}}.$$

Das Verhältnis dieser Maximalfeldstärke zu der im nicht unterteilten Feld wird

$$\frac{E_{\max}}{E_{i0}} = \frac{\ln a^3}{\ln a} \frac{1}{(1 + a)^2 - a} = \frac{3}{(1 + a)^2 - a}.$$

3.13. Die elektrische Spiegelung

Eine positive Ladung befinde sich in bestimmtem Abstand von einer leitenden Ebene mit dem Potential Null (Abb. 150). Aus der Tatsache, daß im Kraftfeld zweier gleichgroßer Ladungen mit entgegengesetzten Vorzeichen die auf der Verbindungsgeraden senkrecht stehende Halbierungsebene eine Äquipotentialfläche mit dem Potentialwert Null ist, läßt sich eine Lösungsmethode für das

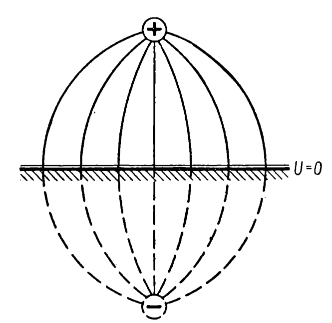


Abb. 150. Spiegelung einer Punktladung

Feld der oben gegebenen Anordnung ableiten: Man spiegele die Ladung $+Q$ an der Ebene, setze an Stelle ihres Spiegelbildes die Ladung $-Q$ und bestimme das Kraftfeld beider Ladungen $+Q$ und $-Q$ in der Weise, als ob der ganze Raum leer wäre. Dieses Kraftfeld stimmt außerhalb des Metalles mit dem gesuchten Feld überein. Innerhalb des Metalles ist die Feldstärke natürlich überall Null.

Dieses Verfahren stimmt im Prinzip mit dem vorher angewendeten Verfahren überein, bei dem man das Feld bestimmte, indem man die Äquipotentialflächen durch Leiter ersetzte. Durch die Spiegelungsmethode wird das Feld von Punktladungen erhalten, indem eine Elektrodenfläche mit einer Äquipotentialfläche identisch ist.

Die gespiegelte Ladung ist in Wirklichkeit im Metall natürlich nicht vorhanden, man findet vielmehr auf der Metalloberfläche eine gleichgroße Ladung verteilt.

Analog können auch die Felder mehrerer Punktladungen und einer leitenden Ebene oder mehrerer geladener Leitungen, die parallel zur leitenden Ebene verlaufen, bestimmt werden (Abb. 151).

Die Spiegelung kann auch allgemeiner durchgeführt werden, wenn eine Ladung $+Q$ und eine beliebige leitende Fläche gegeben sind. Man hat dann Ort und Größe jener imaginären Ladung (oder Ladungen) zu ermitteln, durch die das Potential auf der Fläche einen konstanten Wert, z. B. Null, erhält.

Man gelangt gegebenenfalls mit Hilfe einer mehrfachen Spiegelung zum Ziel. In Abb. 152 ist das Feld einer sehr langen geladenen Leitung gezeigt, die sich in einer räumlichen Ecke befindet. Wird die Linienladung nur an der vertikalen Ebene gespiegelt, so würde zwar das Potential auf dieser Halbebene Null werden, auf der ganzen horizontalen Ebene jedoch veränderlich sein.

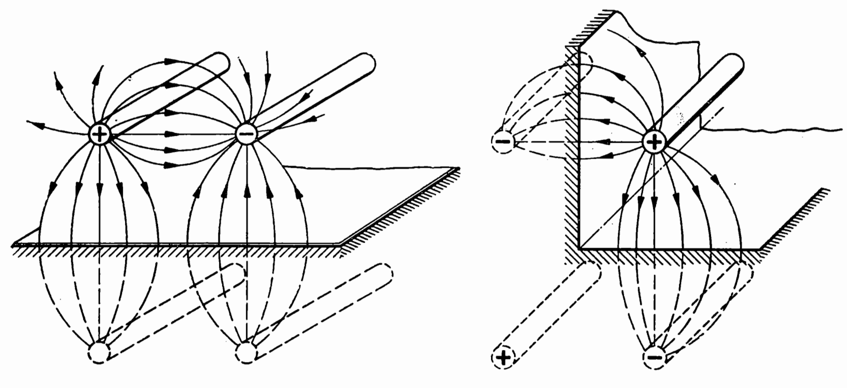


Abb. 151. Kraftfeld zwischen einer Doppelleitung und Erde

Abb. 152. Mehrfache Spiegelung

Damit auch hier das Potential Null wird, ist die Ladung auch an dieser Ebene zu spiegeln. Durch zwei Spiegelungen dieser Art werden aber automatisch noch zwei, durch Spiegelung an der vertikalen bzw. horizontalen Ebene entstehende Bildladungen erzeugt, die, soll das Verfahren gültig sein, in Ort und Größe identisch sein müssen.

Diese Bedingung wird besser durch die Abb. 153 veranschaulicht, wo die Ladungen in einem keilförmigen Volumen untergebracht sind. Man sieht sofort,

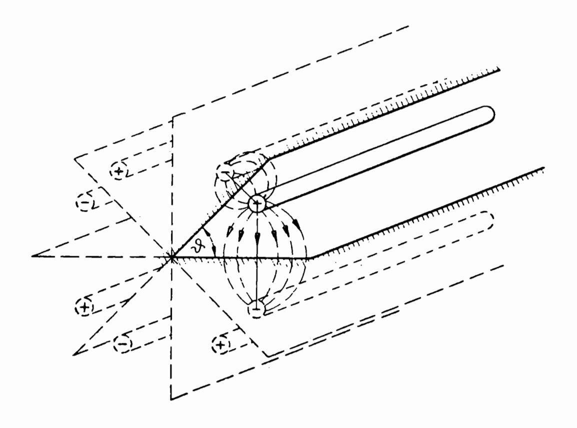


Abb. 153. Spiegelung in einem räumlichen Keil

daß das Spiegelungsverfahren nur dann erfolgreich sein kann, wenn 2π ein ganzzahliges Vielfaches des Winkels ϑ ist.

Wird die Spiegelung an einem Zylinder vorgenommen, so sucht man gemäß Abb. 154 den Ort jener Linienladung, die in Zusammenwirken mit der gegebenen äußeren Ladung die leitende Zylinderoberfläche auf ein konstantes

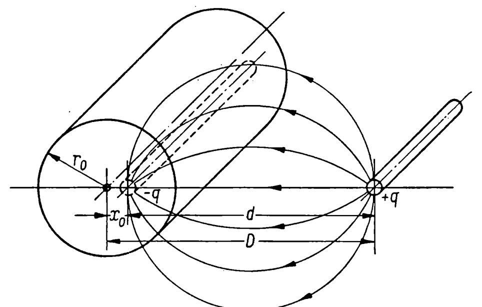


Abb. 154. Spiegelung an einem Zylinder

Potential bringt. Die Aufgabe, den Ort jener Linienladung $-q$ zu suchen, die mit der gegebenen Ladung $+q$ gemeinsam auf dem Zylinder mit dem gegebenen Radius r_0 ein konstantes Potential besitzt, wurde in Abschn. 3.10.4. gelöst. Es ergaben sich die Beziehungen

$$r_0 = \frac{kd}{k^2 - 1}; \quad x_0 = \frac{d}{k^2 - 1}; \quad k = \frac{d - (r_0 - x_0)}{r_0 - x_0} = \frac{d + x_0 - r_0}{r_0 - x_0}.$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung folgt

$$r_0 = kx_0.$$

Wird der Wert k aus der dritten Gleichung eingesetzt, erhält man

$$r_0^2 = (d + x_0)\, x_0.$$

Damit ist der Ort der Ladung $-q$ bei einem Zylinder mit gegebener Lage und dem Radius r_0 sehr einfach zu finden. Gemäß Abb. 155 zieht man von der

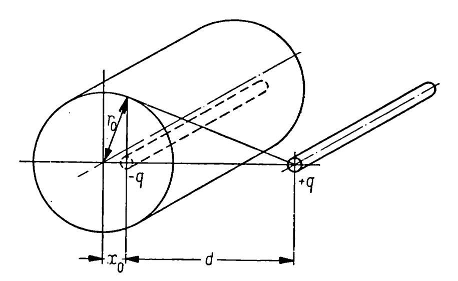


Abb. 155. Konstruktion des Spiegelortes

Ladung $+q$ eine Tangente an den Zylinder und projiziert den Berührungspunkt auf die Verbindungsgerade. Dorthin ist das Spiegelbild von $+q$, die Ladung $-q$, zu verlegen. In diesem Fall ist die Kathete r_0 im entstandenen rechtwinkligen Dreieck das geometrische Mittel zwischen der Hypothenuse und der zugehörigen Kathetenprojektion.

Auf diese Weise wird der Zylinder ein ganz bestimmtes Potential annehmen:

$$U_0 = \frac{q}{2\pi\,\varepsilon_0} \ln \frac{r_0 - x_0}{d - (r_0 - x_0)}.$$

Verlangt man, daß der Zylinder ein hiervon abweichendes Potential hat, so bringt man in der Zylinderachse noch eine dritte Ladung q_3 an, durch die gemeinsam mit dem vorstehenden Potential der gewünschte Wert geliefert wird. Die Ladung des Zylinders beträgt $q_3 - q$. Soll der Zylinder ungeladen sein, so bringt man in seinem Mittelpunkt die Ladung $+q$ an. Dabei bleibt der Potentialwert auf dem Zylinder auch weiterhin konstant.

Beispiele und Ergänzungen

1. Es soll zunächst das Feld in der Umgebung eines ungeladenen Metallzylinders berechnet werden, der in ein homogenes Feld mit der zur Zylinderachse senkrechten Richtung z gebracht wurde, dann das Feld eines Zylinders mit einer bestimmten Ladung. Wir erzeugen das homogene Feld, indem wir eine Ladung $+q$ aus der Nähe des Zylinders ins Unendliche entfernen, wobei die Ladung gleichzeitig derart anwächst, daß die Feldstärke

$$E_0 = \frac{1}{2\pi\,\varepsilon_0}\frac{q}{d}$$

endlich bleibt. Dabei wird der Ort des Spiegelbildes $-q$ dem Zylindermittelpunkt beliebig nahe kommen. Wird in den Mittelpunkt dann eine Ladung $+q$ gebracht, so beträgt die Gesamtladung des Zylinders Null, das Potential bleibt auf der Zylinderfläche konstant, und das ursprüngliche Feld wird von dem Liniendipolfeld mit dem Moment

$$|\mathfrak{p}| = x_0 q = x_0 \cdot d \cdot 2\pi\varepsilon_0 \cdot E_0 = 2\pi\, r_0^2\, \varepsilon_0 E_0$$

überlagert. Hierbei haben wir die Beziehung

$$r_0^2 = (d + x_0)\, x_0 \to d x_0$$

benutzt. Wir erhalten damit das Potential des in ein homogenes Feld gebrachten ungeladenen Metallzylinders:

$$U = -E_0 z + \frac{\mathfrak{p}}{2\pi\,\varepsilon_0}\,\text{grad}\ln\frac{1}{r}.$$

Besitzt der Zylinder dagegen die Ladung q_1, so wird

$$U = -E_0 z + \frac{\mathfrak{p}}{2\pi\,\varepsilon_0}\,\text{grad}\ln\frac{1}{r} + \frac{q_1}{2\pi\,\varepsilon_0}\ln\frac{1}{r}.$$

Die Kraftfelder des ungeladenen und des geladenen Zylinders sind in den Abb. 156 und 157 gezeichnet. Wird die Abb. 156 längs der strichpunktierten Linie aufgeschnitten, erhält man das Feld in der Umgebung eines auf einer

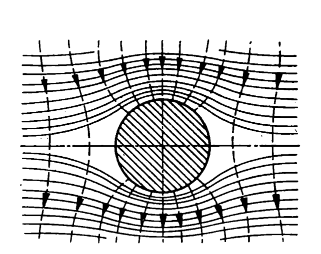


Abb. 156. Ungeladener Zylinder im homogenen Feld

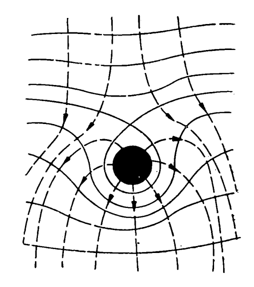


Abb. 157. Geladener Zylinder im homogenen Feld

Die Richtung z zeigt in Abb. 156 und 157 von oben nach unten in der Zeichenebene

Ebene liegenden Halbzylinders. Es ist von praktischem Interesse, einmal zu untersuchen, wie sich die Feldstärke an der Oberfläche einer Ebene ändert, wenn sich dort eine derartige Ausbeulung befindet. Die maximale Feldstärke beträgt

$$(E_{\max})_{r=r_0} = -\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{\substack{r=r_0\\ \varphi=0}} = E_0 - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\pi\,\varepsilon_0\,r_0^2 E_0}{2\pi\,\varepsilon_0}\,\mathfrak{k}\,\text{grad}\ln\frac{1}{r}\right)$$

$$= E_0 - r_0^2 E_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{1}{r}\right)_{\substack{r=r_0\\ \varphi=0}} = 2E_0,$$

d. h., die maximale Feldstärke wird auf das Doppelte erhöht (Abb. 158).

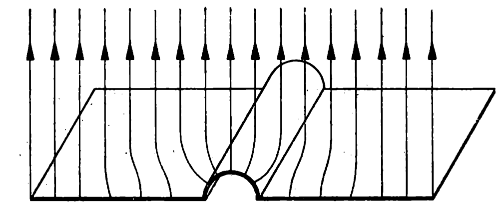


Abb. 158. Kraftfeld eines auf eine leitende Ebene gelegten Halbzylinders

2. Im Abstand d von einer unendlich großen, leitenden, geerdeten Ebene befinde sich die Punktladung $-Q$. Man bestimme die auf der Ebene meßbare Flächenladungsdichte.

Mit Hilfe des Prinzips der elektrischen Spiegelung läßt sich das Problem auf die Frage zurückführen, wie groß der Betrag des Verschiebungsvektors in

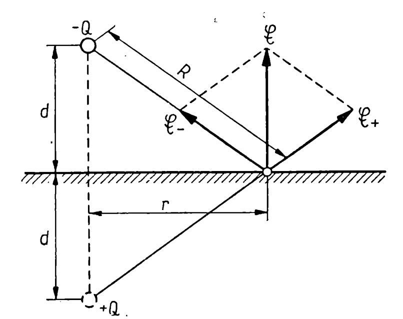


Abb. 159. Durch $-Q$ hervorgerufene Flächenladungsdichte auf einer leitenden Ebene

der Mittelebene der Verbindungsgeraden von zwei gleichgroßen Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens ist (Abb. 159). Es ist

$$E = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\frac{2d}{R} = \frac{Qd}{2\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

und damit

$$\sigma = D = \varepsilon_0 E = \frac{Qd}{2\pi}\frac{1}{(r^2+d^2)^{3/2}}.$$

Die Gesamtladung einer Kreisplatte vom Halbmesser r_0 ist

$$Q_0 = \int_0^{r_0} \sigma(r)\cdot 2r\,\pi\,dr = Qd\int_0^{r_0}\frac{r}{(r^2+d^2)^{3/2}}\,dr$$

$$= Qd\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{(r_0^2+d^2)^{1/2}}\right].$$

Für $r_0 \to \infty$ geht $Q_0 \to Q$, d. h., daß die Gesamtladung der Ebene gleich der Größe der Punktladung wird.

3.14. Spiegelung an einer Kugelfläche

Das Feld einer Kugel mit dem Radius r_0 und einer außerhalb liegenden Ladung $+Q$ kann bestimmt werden, indem man diese Ladung an der Kugel spiegelt. Die im Kugelinneren unterzubringende Ladung $-Q'$ ist dabei so zu bestimmen, daß deren Feld mit dem Feld der Ladung $+Q$ gemeinsam auf der

ganzen Kugelfläche gerade das Nullpotential liefert. Wir sahen, daß sich im Feld von zwei Ladungen, deren Größen und Vorzeichen verschieden sind, nur eine einzige kugelförmige Potentialfläche befindet. Das ist jene Potentialfläche, bei der für das Verhältnis der zu ihr gezogenen Strahlen

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{Q}{Q'} = k$$

gilt, wobei

$$k = \frac{d + x_0 - r_0}{r_0 - x_0}$$

ist. d und x_0 erhält man mit Hilfe der gleichen Konstruktion, die bei der Spiegelung an einem Zylinder bereits angewendet wurde (Abb. 160). Somit gilt

$$Q = -\frac{d + x_0 - r_0}{r_0 - x_0} Q'.$$

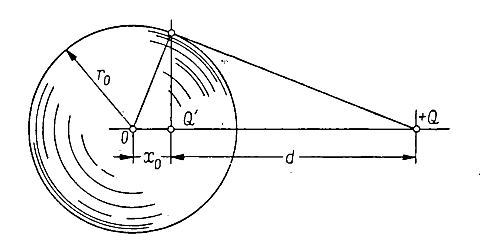


Abb. 160. Spiegelung an einer Kugel

Durch die Beziehung

$$r_0^2 = x_0(d + x_0)$$

kann sofort bewiesen werden, daß

$$\frac{d + x_0 - r_0}{r_0 - x_0} = \frac{r_0}{x_0} = \frac{d + x_0}{r_0}$$

ist. Für die gespiegelte Ladung erhält man dann den Wert

$$Q' = -\frac{x_0}{r_0} Q = -\frac{r_0}{d + x_0} Q.$$

Es soll jetzt das Feld zweier leitender Kugeln mit gleichem Radius im Abstand D untersucht werden, wenn die eine das Potential U_0, die andere das Potential Null besitzt (Abb. 161). Die Kugel (1) kann auf das Potential U_0

gebracht werden, wenn man in ihren Mittelpunkt die Ladung Q_1 bringt, deren Berechnung mit Hilfe der Beziehung

$$U_0 = \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r_0}$$

erfolgen kann. Durch diese Ladung wird auf der Fläche der Kugel (2) jedoch kein konstanter Potentialwert geliefert. Um auf der Kugel (2) ein Potential Null erhalten zu können, ist in ihrem Innern die Ladung

$$Q_1' = -\frac{r_0}{d + x_{02}'} Q_1 = -\frac{r_0}{D} Q_1$$

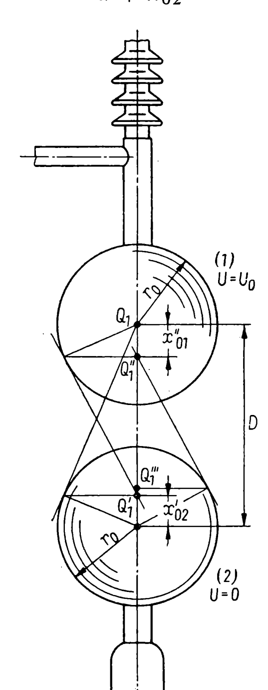


Abb. 161. Bestimmung des Feldes einer Meßfunkenstrecke

anzubringen. Ihr Abstand vom Mittelpunkt der Kugel (2) ist

$$x_{02}' = \frac{r_0^2}{d + x_{02}'} = \frac{r_0^2}{D}.$$

Durch diese Ladung wird aber das konstante Potential der Kugel (1) beeinträchtigt. Um deren Potential konstant beibehalten zu können, muß diese

Ladung Q_1' an der Kugel (1) gespiegelt werden. Im Innern der Kugel (1) entsteht dadurch die Spiegelladung

$$Q_1'' = -\frac{r_0}{D - x_{02}'} Q_1'$$

im Abstand

$$x_{01}'' = \frac{r_0^2}{D - x_{02}'}$$

vom Mittelpunkt der Kugel (1). Durch diese Ladung wird wiederum das Potential auf Kugel (2) geändert, so daß die Ladung

$$Q_1''' = -\frac{r_0}{D - x_{01}''} Q_1''$$

in den entsprechenden Ort zu bringen ist. Ihr Abstand vom Mittelpunkt der Kugel (2) ist

$$x_{02}''' = \frac{r_0^2}{D - x_{01}''}.$$

Es läßt sich beweisen, daß dieses Verfahren konvergent ist. Die Werte der gespiegelten Ladungen werden nach einigen stattgefundenen Spiegelungen derart klein sein, daß ihr Einfluß völlig vernachlässigt werden kann.

Mit dieser Spiegelungsmethode kann man nicht nur das Feld von Kugeln von gleichen, sondern auch von verschiedenen Halbmessern sowie auch von Kugeln, die exzentrisch angeordnet sind, bestimmen.

Nach diesen Erörterungen können nun auch die Felder einer geladenen und ungeladenen Kugel behandelt werden, die in ein homogenes Feld gebracht wurden.

Zunächst soll das Feld einer ungeladenen, isoliert angeordneten Kugel untersucht werden.

Wir gehen von dem bereits behandelten Fall gemäß Abb. 162 aus: Durch die Ladungen Q_0 und $Q_0' = -\frac{x_0}{r_0} Q_0$ wird gemeinsam ein Feld erzeugt, das auf der Kugel das konstante Potential Null annimmt. Die Gesamtladung der

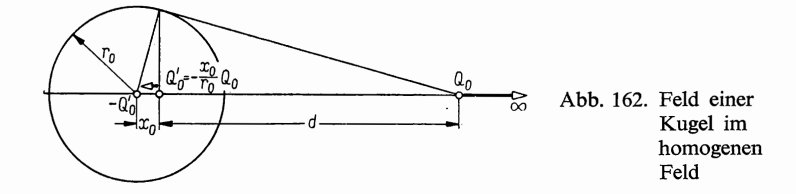


Abb. 162. Feld einer Kugel im homogenen Feld

Kugel ist in diesem Fall Q_0'. Soll die Kugel keine Ladung besitzen, so ist im Kugelinnern auch die Ladung $-Q_0'$ unterzubringen. Wird diese in den Kugelmittelpunkt gelegt, so bleibt das Potential auf der Kugelfläche auch weiterhin konstant, doch natürlich nicht Null. Wird die Ladung Q_0 nun ins Unendliche gerückt, und zwar derart, daß die Feldstärke

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q_0}{d^2}$$

am Ort der Kugel endlich bleibt, so wird das Feld homogen. Dabei rückt aber Q_0' in den Mittelpunkt, und x_0 nähert sich dem Wert Null. Das Dipolmoment $|\mathfrak{p}| = x_0 Q_0'$ bleibt hingegen wegen der geforderten endlichen Feldstärke E endlich. Mit der Beziehung $r_0^2 \approx x_0 d$ kann man schreiben

$$|\mathfrak{p}| = x_0 Q_0' = -x_0 \frac{x_0}{r_0} Q_0 = -\frac{x_0^2 d^2}{r_0} \cdot 4\pi\,\varepsilon_0 E_0 = -4\pi\,\varepsilon_0 r_0^3 E_0 .$$

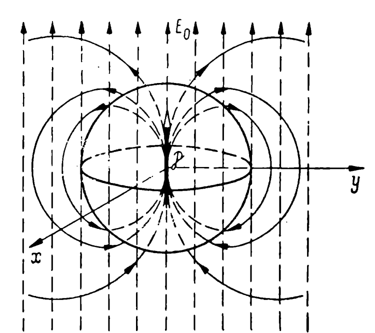


Abb. 163. Störfeld einer in ein homogenes Feld gebrachten Metallkugel

Berücksichtigt man auch die Vorzeichen, so folgt

$$\mathfrak{p} = 4\pi\,\varepsilon_0 r_0^3 \mathfrak{E}_0 .$$

Das Störfeld einer in ein homogenes Feld gebrachten ungeladenen Kugel wird also außerhalb der Kugel durch das im Kugelmittelpunkt untergebrachte Dipolmoment, das dem Feld verhältnisgleich ist, beschrieben (Abb. 163).

Ist die Kugelladung Q, so schließt sich den bisherigen auch das durch die Ladung Q erzeugte Potential

$$U = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

an. Zeigt das Feld E_0 gegen die positive Richtung von z, so beträgt das Potential der Kugel mit der Ladung $+Q$

$$U = -E_0 z + \frac{\mathfrak{p}}{4\pi\,\varepsilon_0} \operatorname{grad} \frac{1}{r} + \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Diese Potentialfunktion beschreibt auch das Feld einer auf einer Ebene liegenden Halbkugel. Es ist wieder von praktischem Interesse, daß sich die maximale Feldstärke hierbei auf das Dreifache derjenigen des ursprünglich homogenen Feldes erhöht.

3.15. Graphische Konstruktion des ebenen Kraftfeldes

In der Praxis kann man die Felder komplizierterer Elektrodenanordnungen nicht mehr rechnerisch erfassen. Es bietet sich aber noch ein verhältnismäßig einfaches Verfahren zur Bestimmung des ebenen Kraftfeldes an, also zur Bestimmung des Kraftfeldes von zylindrischen Elektroden mit beliebigen Leit-

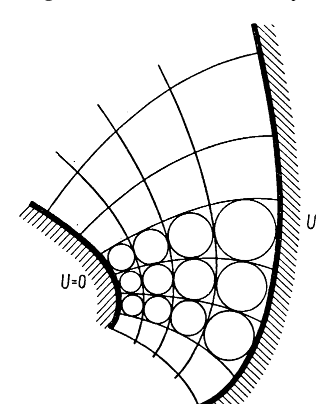


Abb. 164. Graphische Konstruktion eines zylindrischen Kraftfeldes

kurven. Gegeben sei eine aus zwei Zylindern bestehende Elektrodenanordnung (Abb. 164). Um das Kraftfeld und die zwischen beiden Elektroden bestehende Spannung zu untersuchen, geht man von der Tatsache aus, daß die Leitflächen Äquipotentialflächen sind. Dann wird gefühlsmäßig eine der einen Elektrode benachbarte Niveaufläche gezeichnet und sowohl auf der Elektrodenfläche als auch auf der eingezeichneten Niveaufläche senkrecht stehend mit dem Einzeichnen der Kraftlinien begonnen in der Weise, daß diese der geschätzten Stärke des Feldes gemäß hier dicht gezeichnet werden, wo die Schichtflächen nahe beieinanderliegen, und dort mit weiterem Abstand, wo sie weiter voneinander

entfernt liegen. Zur Vereinfachung der Zeichnung wird das Verhältnis des Kraftlinienabstandes zum Abstand der Schichtflächen voneinander – das auf Grund der vorstehenden Ausführungen konstant sein muß – gleich Eins gewählt, wodurch man ein orthogonales Netz erhält. Sind alle Kraftlinien zwischen den beiden Schichtlinien eingetragen, so zeichnet man die nächste Äquipotentialfläche, durch diese wieder ein orthogonales Netz legend, und fährt nach diesem Verfahren fort, bis sich schließlich die an die andere Elektrode anschmiegende Äquipotentialfläche ergeben hat. Das richtige Kraftlinienbild kann man in der Regel natürlich nur nach längeren Versuchen gewinnen.

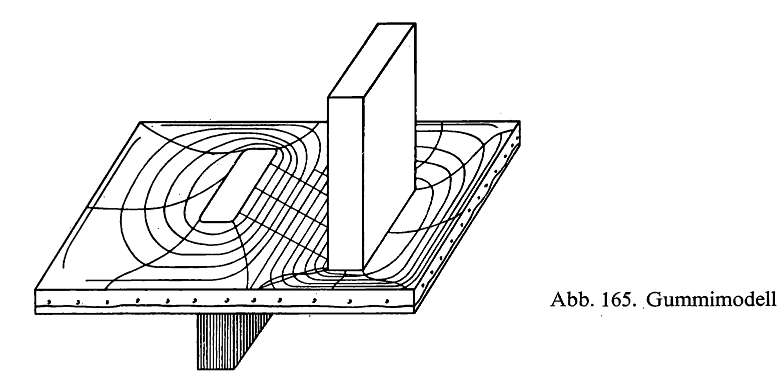


Abb. 165. Gummimodell

Ebene Kraftfelder, die aus den verschiedensten Leitkurven entstanden sind, lassen sich leicht mit Hilfe eines Modells darstellen. Über einen Rahmen wird eine elastische Gummimembran gespannt (Abb. 165). Die zylindrische Elektrode wird aus irgendeinem Stoff angefertigt, und die Gummimembran wird mit dieser bis zu einer bestimmten Höhe emporgedrückt. Es läßt sich beweisen, daß der Abstand der Gummimembran von der Grundebene in allen Punkten der in dem betreffenden Raumpunkt herrschenden Potentialdifferenz proportional ist. In dieser Weise kann auch das Kraftfeld sehr komplizierter, jedoch nur zylindrischer Elektroden bestimmt werden. Die praktische Anwendbarkeit dieses Verfahrens wird auch durch die Tatsache erheblich gefördert, daß die Bewegung eines auf die Membran gebrachten kleinen Metallkügelchens der Bewegung einer in das Potentialfeld gebrachten elektrischen Ladung analog ist. Mit diesem Modell kann man also den Weg der im elektrischen Feld beweglichen elementaren Ladungsträger sichtbar machen.

3.16. Der Begriff der Kapazität

Im Abschnitt 3.12. wurden die Kraftfelder und Potentialverhältnisse von einigen Elektrodenanordnungen bestimmt. In allen dort diskutierten Fällen

war die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden der Ladung proportional. Dies trifft auch ganz allgemein zu. In der Abb. 166 sind zwei Elektroden gezeichnet, die mit gleichgroßen Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens versehen sind. Die Kraftlinien, die von der positiv geladenen Elektrode ausgehen, enden sämtlich auf der negativ geladenen Elektrode. Diese Anordnung

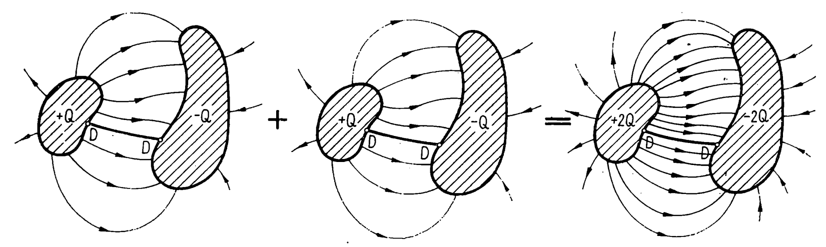


Abb. 166. Verdoppelung der Ladung

wird Kondensator genannt. Befinden sich auf den Elektroden die Ladungen $+Q$ bzw. $-Q$, so tritt zwischen den beiden Elektroden irgendeine Spannung U auf. Wird die Ladung bei beiden Elektroden verdoppelt, so wird auch die Feldstärke in allen Punkten und damit auch die Potentialdifferenz zwischen den beiden Elektroden auf Grund des Überlagerungsprinzips auf das Doppelte steigen. Es gilt allgemein, daß bei Erhöhung der Ladung auf das n-fache auch die Potentialdifferenz auf ihren n-fachen Wert steigt. Hieraus kann gefolgert werden, daß das Verhältnis von Ladung zu Potentialdifferenz konstant und lediglich von den geometrischen Abmessungen und der Anordnung der Leiter abhängt. Diese Konstante

$$C = Q/U \tag{3.6.1}$$

nennt man die Kapazität der betreffenden Elektrodenanordnung. Ihre Maßeinheit ist das Farad:

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F}.$$

Ein Kondensator besitzt nach (3.6.1) eine Kapazität von 1 F, wenn er durch die Ladung von 1 C auf die Spannung von 1 V aufgeladen wird.

Für einen Plattenkondensator gilt nach (3.10.5)

$$U = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{A} l.$$

Damit wird die Kapazität des Plattenkondensators

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \frac{A}{l}.$$

Die Kapazität eines Plattenkondensators ist also der Größe der Flächen direkt, dem Abstand zwischen diesen umgekehrt proportional. Ein Plattenkondensator mit der Fläche 1 m^2 und einem Plattenabstand von 1 mm hat die Kapazität

$$C = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3 = 8{,}86 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{F}.$$

Man sieht, daß selbst verhältnismäßig große Flächen nur eine sehr kleine Kapazität liefern. Die in der Praxis verwendeten Kondensatoren haben Kapazitäten der Größenordnung 10^{-6} F = 1 μF bis 10^{-12} F = 1 pF.

Mitunter wird auch eine aus dem in der Physik gebräuchlichen Maßsystem abgeleitete Einheit, das Zentimeter, verwendet. Die Beziehung zwischen pF und cm lautet

$$1\ \mathrm{cm} = \frac{10}{9}\ \mathrm{pF}.$$

Die Kapazität eines Kondensators pflegt man auch das Ladungsfassungsvermögen des Kondensators zu nennen. Dies darf aber keineswegs etwa mit dem Fassungsvermögen eines Gefäßes verglichen werden. Ein Gefäß von 5 *l* Rauminhalt kann höchstens mit 5 *l* Wasser gefüllt werden, während ein Kondensator von beliebig kleiner Kapazität mit einer prinzipiell sehr großen, man könnte übertrieben sagen mit einer beliebig großen, Ladung aufgeladen werden kann. Allerdings steigt gleichzeitig die Spannung auf unzulässige Werte an. Deshalb läßt sich das Ladungsfassungsvermögen eines Kondensators eher mit der Gasaufnahmefähigkeit eines Luftballons vergleichen. Die in einem Luftballon unterzubringende Gasmenge ist nur durch den Druck begrenzt, bei dem er zerplatzt. Ebenso ist bei einem Kondensator der möglichen Ladungsgröße durch die Spannung, die mit der Ladung gleichsinnig ansteigt, eine Grenze gesetzt. Bei einer bestimmten Spannung schlägt der Kondensator durch.

Bei einem Kugelkondensator ist die Spannung zwischen der inneren und der äußeren Kugel nach Gl. (3.12.1)

$$U = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}\right).$$

Damit wird die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\,\varepsilon_0\,\frac{r_i\,r_a}{r_a - r_i}.$$

Die Kapazität einer einzelnen Kugel (in bezug auf die unendlich große Außenkugel) ist

$$C = \lim_{r_a \to \infty} 4\pi\,\varepsilon_0 \frac{r_i}{1 - \dfrac{r_i}{r_a}} = 4\pi\,\varepsilon_0\, r_i .$$

Sie ist dem Kugelradius direkt proportional.

Das Potential koaxialer Zylinder ist nach (3.12.4)

$$U = \frac{q}{2\pi\,\varepsilon_0} \ln \frac{r_a}{r_i}.$$

Damit wird die Kapazität

$$C = \frac{lq}{U} = \frac{2\pi\,\varepsilon_0 l}{\ln \dfrac{r_a}{r_i}}.$$

Die Spannung zwischen parallelen Zylindern, deren Radien gleich und im Vergleich zum gegenseitigen Abstand klein sind, ist

$$U \doteq \frac{q}{2\pi\,\varepsilon_0}\left[\ln \frac{d - r_0}{r_0} - \ln \frac{r_0}{d - r_0}\right] = \frac{q}{\pi\varepsilon_0} \ln \frac{d - r_0}{r_0}.$$

Damit folgt für deren Kapazität (falls $d \gg 2r_0$ ist)

$$C = \frac{lq}{\dfrac{q}{\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{d - r_0}{r_0}} = \pi\varepsilon_0 l \frac{1}{\ln \dfrac{d - r_0}{r_0}}.$$

Zwischen parallelen Zylindern mit verschieden großen Radien r_1 und r_2 ist die Spannung

$$U = \frac{q}{2\pi\,\varepsilon_0} \ln \frac{[d - (r_1 - x_1)]\,[d - (r_2 - x_2)]}{(r_1 - x_1)\,(r_2 - x_2)}$$

und damit die Kapazität

$$C = \frac{2\pi\,\varepsilon_0 l}{\ln \dfrac{[d - (r_1 - x_1)]\,[d - (r_2 - x_2)]}{(r_1 - x_1)\,(r_2 - x_2)}}$$

mit

$$x_i = \frac{D}{2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - r_i^2}, \quad i = 1,2 \quad \text{und} \quad d = D - (x_1 + x_2),$$

wobei D den Abstand zwischen den beiden Zylinderachsen bedeutet.

Beispiele und Ergänzungen

1. Bei der Bemessung eines Plattenkondensators sei die Kapazität vorgegeben. Die größte Feldstärke darf den kritischen Wert nicht übersteigen. Es gelten

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{l}, \quad E_{kr} = \frac{U}{l}.$$

C, U und E_{kr} sind gegeben. Aus den beiden Gleichungen können A und l bestimmt werden:

$$l = \frac{U}{E_{kr}}, \quad A = \frac{lC}{\varepsilon_0} = \frac{UC}{\varepsilon_0 E_{kr}}.$$

In der Praxis läßt sich die kritische Feldstärke natürlich nicht erreichen, weil selbst die geringste Oberflächenrauhigkeit zum Durchschlag führen würde. Man berücksichtigt dies durch einen Sicherheitsfaktor β und beschränkt die Betriebsspannung auf

$$U_B = \frac{U}{\beta}.$$

2. In der in Abb. 167 gezeigten Anordnung sind auf einer Drehachse halbkreisförmige Platten (Rotoren) nebeneinander angebracht. Diese können in ein gleiches ortsfestes Plattensystem (Stator) gedreht werden. Ist der Rotor zwischen die Statorplatten vollständig eingedreht, so hat man $n - 1$ kleine

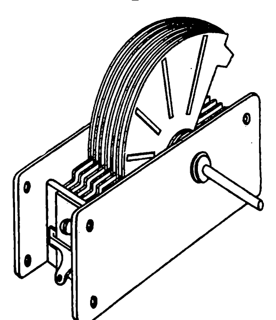


Abb. 167. Drehkondensator

Kondensatoren, wenn die Gesamtplattenanzahl n ist. Man kann diese Anordnung auch so auffassen, als ob der Kondensator die $(n - 1)$fache Fläche gegenüber einer einzelnen Platte hätte. Damit wird die Kapazität des Kondensators im eingedrehten Zustand

$$C = (n - 1)\, \varepsilon_0 \frac{A}{l},$$

wobei A die Fläche einer einzelnen halbkreisförmigen Platte ist. Natürlich wird die Kapazität, falls der Kondensator bis zum Winkel α zwischen die Statorplatten eingedreht wird, den dann gegenüberstehenden Flächen proportional sein, d. h.

$$C = (n - 1)\,\varepsilon_0 \frac{A}{l}\frac{\alpha}{\pi}.$$

Bei genaueren Berechnungen ist die Summe der Flächen abzuziehen, die wegen der Drehachse ausgeschnitten sind, ebenso müssen auch die Anfangskapazitäten, die auch im vollkommen herausgedrehten Zustand auftreten, berücksichtigt werden. Deren Größe kann zwar nur geschätzt werden, ihr Wert läßt sich jedoch mit genauen Messungen gut bestimmen. Damit wird der Wert der Kapazität für den Drehkondensator

$$C = (n - 1)\,\varepsilon_0 \frac{A - A_0}{l}\frac{\alpha}{\pi} + C_0.$$

Für die drei Unbekannten A, l, n können auch diesmal nur zwei Gleichungen angegeben werden. Über eine Unbekannte kann beliebig verfügt werden, wie es die jeweiligen Gesichtspunkte gerade erfordern.

3. Bei der Bestimmung der Kapazität des Plattenkondensators wurde das Feld als homogen angenommen. In Wirklichkeit besitzt der Kondensator auch ein Streufeld. Wird die Kapazität unter Beachtung dieses Umstandes größer oder kleiner als die berechnete Kapazität sein?

Aus dem Bild des Kraftfeldes geht hervor, daß ein Teil der D- und E-Linien, die der gegebenen Ladung (bzw. der dieser zugeordneten Flächenladungsdichte $\sigma = Q/A$) entspringen, außerhalb des homogenen Feldes verläuft. Die Dichte der Kraftlinien (d. i. der Wert der Feldstärke) wird also innerhalb des Kondensators kleiner sein, als wenn das äußere Feld unbeachtet bliebe. Es wird also auch die Spannung $U = \int \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l}$ kleiner sein; da nun die Beziehung $C = Q/U$ besteht, läßt sich abschätzen:

$$C_{\text{genau}} = \frac{Q}{U_{\text{genau}}} > \frac{Q}{U_{\text{annähernd}}} = C_{\text{annähernd}}.$$

Nimmt man die Spannung konstant an, so sind zur Erzeugung des Streufeldes zusätzliche Ladungen erforderlich. Es gilt $Q_{\text{genau}} > Q_{\text{annähernd}}$, und damit ergibt sich auch diesmal $C_{\text{genau}} > C_{\text{annähernd}}$.

3.17. Die Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren

Die Elektroden zweier Kondensatoren sollen paarweise verbunden (Abb. 168) und dann an eine Spannungsquelle geschaltet werden. Die Ladung dieser „parallel“geschalteten Kondensatoren ist ersichtlich gleich der Summe der Ladungen jedes der beiden Kondensatoren. Damit gilt für die resultierende Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} = C_1 + C_2 .$$

Die Kapazität zweier parallelgeschalteter Kondensatoren erhält man also, indem man die Kapazitäten der beiden Kondensatoren addiert. Dieses Ergebnis ist auch natürlich, denn die einzelnen Platten der beiden Kondensatoren können als Teile eines einzigen Kondensators angesehen werden.

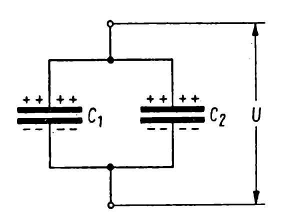


Abb. 168. Parallelschaltung von Kondensatoren

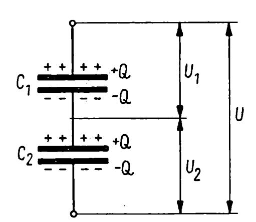


Abb. 169. Reihenschaltung von Kondensatoren

Werden zwei Kondensatoren mit einer Spannungsquelle in Reihe geschaltet (Abb. 169), dann enden alle von einer mit der Spannungsquelle verbundenen Platte ausgehenden Feldlinien auf der gegenüberliegenden Platte und induzieren dort eine gleichgroße Ladung mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die Art der Ladungsverteilung auf den einzelnen Platten geht aus der Abbildung hervor. Jede Platte erhält die gleiche Ladung, durch die zwei Kondensatoren verschiedener Kapazität auf eine unterschiedliche Spannung aufgeladen sind. Die resultierende Kapazität ist

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_1 + U_2} = \frac{1}{\dfrac{U_1}{Q} + \dfrac{U_2}{Q}} = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} .$$

Bei einer Reihenschaltung zweier Kondensatoren ist die reziproke Gesamtkapazität gleich der Summe der reziproken Werte der Teilkapazitäten.

In Verallgemeinerung unserer Ergebnisse gilt bei Parallelschaltung von n Kondensatoren

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n,$$

bei ihrer Reihenschaltung

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}.$$

Da die Ladungen auf den Kondensatoren in Abb. 169 gleich sind, $Q_1 = Q_2 = Q$, gilt für die Teilspannungen

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2} \quad \text{und} \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}.$$

Die auf den einzelnen Kondensator entfallende Spannung ist seiner Kapazität umgekehrt proportional. Aus der Gesamtspannung $U = U_1 + U_2$ folgt für die Größe der Teilspannungen

$$U_1 = U\frac{C_2}{C_1 + C_2}, \quad U_2 = U\frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Der Kondensator mit der kleineren Kapazität hat also die größere Spannung.

Wir müssen bemerken, daß sich die den Kapazitäten umgekehrt proportionale Verteilung der Spannungen bei statischen Feldern nur im Idealfall, bei Wechselspannungen auch bei realen Kondensatoren einstellt. Statisch aufgeladene Kondensatoren haben immer ein Leitvermögen. Sie können so betrachtet werden, als sei den Kondensatoren ein Widerstand parallel geschaltet. Die Spannung wird sich dann im Verhältnis dieser Widerstände verteilen.

Beispiele und Ergänzungen

Die Kapazitäten und Spannung parallelgeschalteter Kondensatoren (Abb. 168) seien

$$C_1 = 0{,}1\ \mu\text{F}; \quad C_2 = 0{,}5\ \mu\text{F}; \quad U = 500\ \text{V}.$$

Die Gesamtkapazität ist dann

$$C = C_1 + C_2 = 0{,}6\ \mu\text{F}.$$

Die in den Kondensatoren gespeicherte Gesamtladung ist $Q = CU = 3 \cdot 10^{-4}\,\text{C}$.

Die Ladungen der einzelnen Kondensatoren betragen dabei

$$Q_1 = C_1 U = 0{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C},$$

$$Q_2 = C_2 U = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}.$$

Die Ladungen parallelgeschalteter Kondensatoren verhalten sich also zueinander wie ihre Kapazitäten.

3.18. Das elektrostatische Feld mehrerer Leiter. Der Begriff der Teilkapazität

Bei der Berechnung der Kapazität der Kondensatoren haben wir bisher stets vorausgesetzt, daß sich nur zwei Leiter im Raum befinden, die beiden Elektroden des Kondensators. Das bedeutet, daß sämtliche Feldlinien, die von der einen Elektrode ausgehen, auf der anderen enden; mit anderen Worten, die beiden Elektroden besitzen eine gleichgroße Ladung mit entgegengesetztem Vorzeichen. Wir wissen, daß der Quotient aus der Ladung der beiden Elektroden und der Spannung eine Konstante ist, die nur von der geometrischen Anordnung der Leiter abhängt. Diese Konstante bezeichneten wir als Kapazität der Elektroden, die den Kondensator bilden. In Wirklichkeit ist das ein stark idealisierter Fall, denn wir können nicht zwei einander gegenüber aufgestellte Metallplatten in eine unendlich große Entfernung von anderen leitenden Körpern bringen. Zum Beispiel sind die Erde, der Experimentator und die anderen metallischen Teile des Stromkreises in ihrer Nähe, und die von den Ladungen ausgehenden Kraftlinien können auch an diesen enden, je nachdem, wie groß die Spannung dieser in der Umgebung befindlichen Leiter im Verhältnis zur Spannung der beiden Kondensatorplatten ist. In diesem Fall erhält man schon nicht mehr eine so einfache Beziehung zwischen der Ladung der Platten und ihrer Spannung. In der Praxis kann man die Feldlinien, die an Leitern der Umgebung enden, oft vernachlässigen oder durch eine kleine Korrektur berücksichtigen. In vielen Fällen spielen sie aber eine wesentliche Rolle. In diesen Fällen spricht man von Teilkapazitäten der einzelnen Elektroden. Das ist z. B. der Fall bei Elektronenröhren mit einem oder mehreren Gittern, wo man von einer Gitter-Anoden-, Gitter-Katoden- und Anoden-Katoden-Kapazität sprechen kann. Eine ähnliche Situation liegt auch bei einem mehradrigen Kabel vor.

Um zum Begriff der Teilkapazität zu gelangen, betrachten wir die drei Leiter in der Abb. 170. Die Kraftlinien, die von der Ladung eines beliebigen Leiters ausgehen, enden entweder an den beiden anderen Leitern, an der Erde oder im Unendlichen. Prinzipiell wäre es möglich, die Erde und auch das Un-

endliche zu den Leitern zu zählen. Dann würden alle von unserem System ausgehenden Kraftlinien auch in diesem enden. In der Praxis ist dies aber nicht üblich, und wir verfahren auch entsprechend. Das Potential eines beliebigen

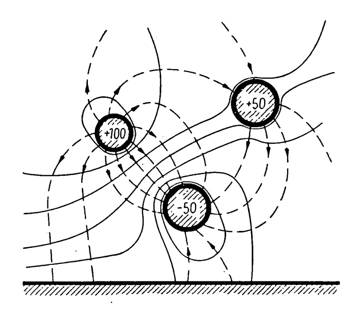


Abb. 170. Anordnung zur Erläuterung des Begriffs „Teilkapazität"

Leiters hängt von der Ladung ab, die wir auf alle anderen Leiter gebracht haben, und zwar hängt es von diesen nach dem Überlagerungsprinzip linear ab. Daher kann man schreiben

$$U_1 = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + a_{13}Q_3,$$
$$U_2 = a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + a_{23}Q_3,$$
$$U_3 = a_{31}Q_1 + a_{32}Q_2 + a_{33}Q_3.$$

Sind die Potentiale bekannt, so lassen sich diese drei Gleichungen auch für die Ladungen lösen. Es folgt, daß die Ladung eines beliebigen Leiters ebenso linear vom Potential aller anderen Leiter abhängt:

$$Q_1 = c_{11}U_1 + c_{12}U_2 + c_{13}U_3,$$
$$Q_2 = c_{21}U_1 + c_{22}U_2 + c_{23}U_3,$$
$$Q_3 = c_{31}U_1 + c_{32}U_2 + c_{33}U_3.$$

Dies kann sehr einfach derart umgeformt werden, daß die Spannungsdifferenzen zwischen den einzelnen Leitern auftreten. Dazu addieren wir zur rechten Seite der ersten Gleichung den Ausdruck

$$c_{12}U_1 + c_{13}U_1 - c_{12}U_1 - c_{13}U_1,$$

der identisch Null ist. Dann lautet die erste Gleichung

$$Q_1 = (c_{11} + c_{12} + c_{13})\, U_1 + c_{12}(U_2 - U_1) + c_{13}(U_3 - U_1).$$

Wenn wir noch die Bezeichnungen

$$c_{11} + c_{12} + c_{13} = C_{1\infty}, \quad -c_{12} = C_{12}, \quad -c_{13} = C_{13}$$

einführen und in gleicher Weise mit den beiden anderen Gleichungen verfahren, erhalten wir:

$$Q_1 = C_{1\infty}U_1 + C_{12}(U_1 - U_2) + C_{13}(U_1 - U_3),$$
$$Q_2 = C_{21}(U_2 - U_1) + C_{2\infty}U_2 + C_{23}(U_2 - U_3),$$
$$Q_3 = C_{31}(U_3 - U_1) + C_{32}(U_3 - U_2) + C_{3\infty}U_3.$$

Die hier vorkommenden einzelnen Kapazitäten nennen wir Teilkapazitäten. $C_{1\infty}$ ist die Kapazität des ersten Leiters, bezogen auf das Unendliche bzw. auf die Erde, C_{12} die Kapazität des Leiters (1), bezogen auf den Leiter (2) usw. Auf diese Weise kann unser Leitungssystem durch sechs Kondensatoren ersetzt werden, deren Kapazität gleich den Teilkapazitäten ist (Abb. 171). Die an einem beliebigen Leiter meßbare Gesamtladung ist gleich der Ladung der Teilkapazitäten, die sich an diesen Punkt anschließen. Es läßt sich nämlich beweisen, daß $C_{ik} = C_{ki}$ ist.

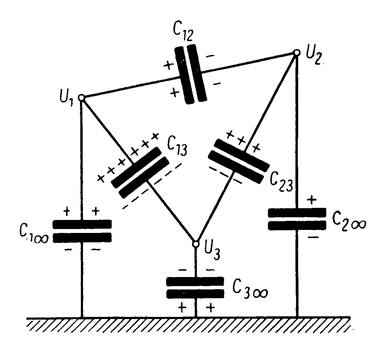


Abb. 171. Ersatzschaltung der drei Leitungen in Abb. 170

Die vorstehenden Gleichungen weisen darauf hin, wie man die einzelnen Teilkapazitäten konstruieren oder berechnen kann. Sind z. B. in der Gleichung

$$Q_1 = C_{1\infty}U_1 + C_{12}(U_1 - U_2) + C_{13}(U_1 - U_3)$$

die Spannungen der Leiter (2) und (3) Null, d. h. gleich der Spannung der Erde oder des unendlich entfernten Punktes, indem sie kurzgeschlossen und geerdet sind, dann lauten unsere Gleichungen:

$$Q_1 = C_{1\infty}U_1 + C_{12}U_1 + C_{13}U_1,$$
$$Q_2 = -C_{12}U_1,$$
$$Q_3 = -C_{13}U_1$$

oder

$$\frac{Q_1}{U_1} = C_{1\infty} + C_{12} + C_{13}, \qquad -\frac{Q_2}{U_1} = C_{12}; \qquad -\frac{Q_3}{U_1} = C_{31}.$$

Das bedeutet, daß auch die vom Leiter (1) ausgehenden Verschiebungslinien und somit auch die Ladungen auf den geerdeten Leitern sich im Verhältnis der Teilkapazitäten verteilen. Es sind also nur diese Ladungen zu messen oder nur die Verschiebungslinien zu konstruieren, um die Teilkapazitäten zu erhalten.

Legt man z. B. die Katode und das Gitter einer Elektronenröhre auf Nullpotential (Abb. 172) und konstruiert die Verschiebungslinien, so wird man finden, daß von den an der Anode ausgehenden 8 Linien 5 auf dem Gitter, 3 dagegen auf der Katode enden. Das Verhältnis der Gitter-Anoden-Kapazität zur Anoden-Katoden-Kapazität ist demnach 5 : 3.

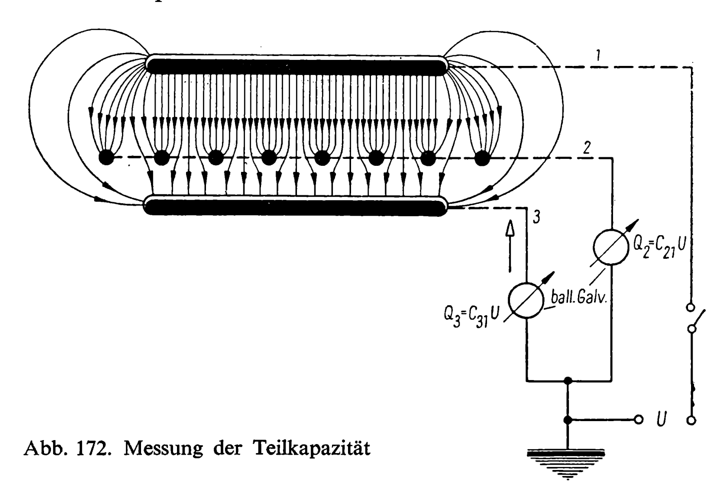


Abb. 172. Messung der Teilkapazität

In Abb. 173 ist die Kraftlinienverteilung eines Kondensators in Erdnähe dargestellt. Bringen wir die eine Belegung des Kondensators auf Nullpotential, dann gilt

$$Q_1 = C_{1\infty}U_1 + C_{12}(U_1 - 0); \quad Q_1 = (C_{1\infty} + C_{12})\,U_1;$$
$$Q_2 = C_{21}(0 - U_1) + C_{2\infty}0; \quad Q_2 = -C_{21}U_1,$$

und wir können an der Abb. 173c sehen, daß die auf die Erde oder auf das Unendliche bezogene Kapazität der einen Belegung gegenüber dem Kapazitätsverhältnis beider Belegungen vernachlässigt werden kann. Deshalb gilt

$$C_{1\infty} \ll C_{12} = C_{21},$$

und man kann mit den einfachen Beziehungen

$$Q_1 = C_{12}(U_1 - U_2),$$
$$Q_2 = C_{12}(U_2 - U_1)$$

rechnen. Der Faktor C_{12} heißt Hauptkapazität des Kondensators, während die Faktoren $C_{1\infty}$ bzw. $C_{2\infty}$ die Streukapazität darstellen. Die Anordnung nach Abb. 173a kann durch das in Abb. 173b gezeigte Kondensatorsystem ersetzt werden. Die Ersatzkondensatoren der Teilkapazitäten C_{ik} können als ideale

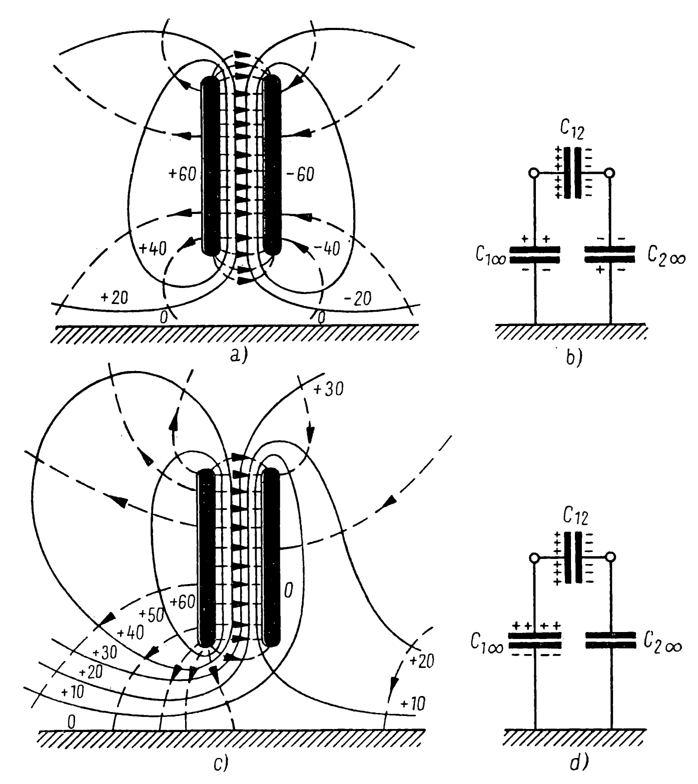


Abb. 173. Das Kraftfeld eines Kondensators in Erdnähe
a) die Platten des Kondensators besitzen gegen Erde eine gleichgroße, aber ungleichnamige Spannung; b) Ersatzschaltung zu a); c) eine Kondensatorplatte geerdet; d) Ersatzschaltung zu c)

Kondensatoren angesehen werden, bei denen die Kraftlinien, die von der einen Belegung ausgehen, alle auf der anderen enden. Mit anderen Worten, die Ladungen der beiden Belegungen sind gleichgroß, jedoch von entgegengesetztem Vorzeichen.

Bei der elementaren Einführung des Kondensatorbegriffs setzten wir voraus, daß wir es mit einem idealen Kondensator im jetzt angedeuteten Sinne zu tun hätten. Natürlich hängt es von uns ab, wieviel Ladung wir auf die einzelnen

Platten des Kondensators bringen. Ein ähnlicher Fall liegt in Abb. 174 vor, wo beide Platten eine gleiche Ladung mit *gleichem* Vorzeichen besitzen. Die entsprechenden Potentialverhältnisse sind in Abb. 175 gezeichnet. Natürlich

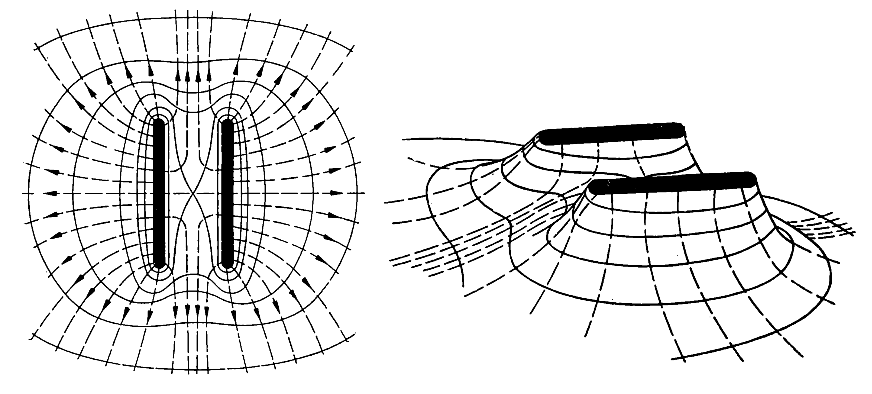


Abb. 174. Kraftlinien und Potentialverhältnisse eines Kondensators

Abb. 175. Potentialgebirge der Anordnung in Abb. 174

sind die Werte der Teilkapazitäten unabhängig von den Ladungen oder Spannungen. In dieser Form lassen sich die Gleichungen

$$Q_1 = C_{1\infty} U_1 + C_{12}(U_1 - U_2),$$
$$Q_2 = C_{12}(U_2 - U_1) + C_{2\infty} U_2$$

bei Kenntnis von Q_1, Q_2 und $C_{1\infty}$, C_{12}, $C_{2\infty}$ auch nach den Spannungen auflösen. Natürlich erhält man auch bei kleinen Werten von Q sehr große Spannungen, weil sich die Ladung jetzt nur auf den Streukapazitäten befindet, deren Werte sehr klein sind.

Alle Ableitungen bleiben auch für n Leiter gültig. Dann ist die Gesamtzahl der Ersatzkondensatoren

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)\,n}{2}.$$

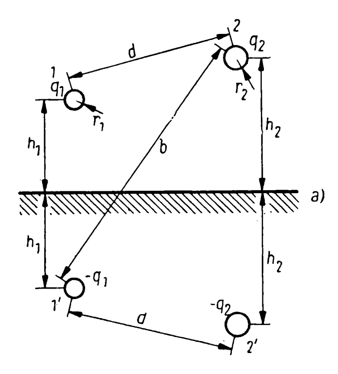
Die Messung oder Konstruktion der Teilkapazität kann auch in diesem Fall nach der angegebenen Methode erfolgen.

Beispiele und Ergänzungen

Es sind die Teilkapazitäten einer über der Erde geführten Doppelleitung zu bestimmen. In Abb. 176 wurden jene Spiegelladungen eingezeichnet, durch

welche die Gegenwart der leitenden Erdoberfläche berücksichtigt wird. Die Potentiale der Leiter sind

$$U_1 = \frac{1}{2\pi\,\varepsilon_0}\left(q_1 \ln\frac{2h_1}{r_1} + q_2 \ln\frac{b}{d}\right), \qquad U_2 = \frac{1}{2\pi\,\varepsilon_0}\left(q_1 \ln\frac{b}{d} + q_2 \ln\frac{2h_2}{r_2}\right).$$



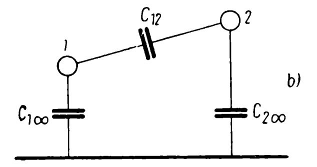


Abb. 176. Teilkapazitäten einer über der Erde geführten Doppelleitung

Auflösung nach den Ladungen liefert:

$$q_1\left[\ln\frac{2h_1}{r_1}\cdot\ln\frac{2h_2}{r_2} - \ln^2\frac{b}{d}\right] = 2\pi\,\varepsilon_0\left[U_1 \ln\frac{2h_2}{r_2} - U_2 \ln\frac{b}{d}\right],$$

$$q_2\left[\ln\frac{2h_1}{r_1}\cdot\ln\frac{2h_2}{r_2} - \ln^2\frac{b}{d}\right] = 2\pi\,\varepsilon_0\left[U_2 \ln\frac{2h_1}{r_1} - U_1 \ln\frac{b}{d}\right].$$

Mit Einführung der Potentialdifferenz kann geschrieben werden:

$$q_1 l = \frac{2\pi\,\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{2h_1}{r_1}\cdot\ln\dfrac{2h_2}{r_2} - \ln^2\dfrac{b}{d}} \times$$

$$\times\left[U_1\left(\ln\frac{2h_2}{r_2} - \ln\frac{b}{d}\right) + (U_1 - U_2)\ln\frac{b}{d}\right],$$

$$q_2 l = \frac{2\pi\,\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{2h_1}{r_1}\cdot\ln\dfrac{2h_2}{r_2} - \ln^2\dfrac{b}{d}} \times$$

$$\times \left[U_2\left(\ln\frac{2h_1}{r_1} - \ln\frac{b}{d}\right) + (U_2 - U_1)\ln\frac{b}{d}\right].$$

Damit betragen die Werte der in Abb. 176b gezeigten Ersatzkapazitäten

$$C_{1\infty} = 2\pi\,\varepsilon_0 l\,\frac{\ln\dfrac{2h_2}{r_2} - \ln\dfrac{b}{d}}{\ln\dfrac{2h_1}{r_1}\cdot\ln\dfrac{2h_2}{r_2} - \ln^2\dfrac{b}{d}},$$

$$C_{2\infty} = 2\pi\,\varepsilon_0 l\,\frac{\ln\dfrac{2h_1}{r_1} - \ln\dfrac{b}{d}}{\ln\dfrac{2h_1}{r_1}\cdot\ln\dfrac{2h_2}{r_2} - \ln^2\dfrac{b}{d}},$$

$$C_{12} = 2\pi\,\varepsilon_0 l\,\frac{\ln\dfrac{b}{d}}{\ln\dfrac{2h_1}{r_1}\cdot\ln\dfrac{2h_2}{r_2} - \ln^2\dfrac{b}{d}}.$$

Liegen beide Leiter in einer waagerechten Ebene ($h_1 = h_2 = h$) und sind ihre Halbmesser gleich ($r_1 = r_2 = r_0$), folgt

$$b = \sqrt{4h^2 + d^2}$$

und

$$C_{1\infty} = C_{2\infty} = \frac{2\pi\,\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{2hb}{dr_0}},$$

$$C_{12} = 2\pi\,\varepsilon_0 l\,\frac{\ln\dfrac{b}{d}}{\ln\dfrac{2hb}{dr_0}\cdot\ln\dfrac{2hd}{br_0}}.$$

Im Betrieb sind $C_{1\infty}$ und $C_{2\infty}$ in Reihe und mit der Hauptkapazität C_{12} parallelgeschaltet. Von der Stromquelle aus gesehen wird daher der Wert der Ersatz-

kapazität, falls man sich auf die in einer Ebene liegenden Leiter beschränkt:

$$C = C_{12} + \frac{C_{1\infty} C_{2\infty}}{C_{1\infty} + C_{2\infty}} = C_{12} + \frac{1}{2} C_{1\infty} = \frac{\pi \varepsilon_0 l}{\ln \dfrac{2hd}{br_0}}.$$

Die resultierende Kapazität kann auch unmittelbar berechnet werden. Das Potential des Leiters (1) wird nach Einsetzen von $q_1 = q$; $q_2 = -q$:

$$U = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0} \left[\ln \frac{1}{r_0} - \ln \frac{1}{2h} - \ln \frac{1}{d} + \ln \frac{1}{b} \right] = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{2hd}{br_0},$$

und damit ergibt sich

$$C_1 = \frac{2\pi \varepsilon_0 l}{\ln \dfrac{2hd}{br_0}}.$$

Infolge der Symmetrie ist $C_2 = C_1$, und die Resultierende beider wird

$$C = \frac{C_1}{2} = \frac{\pi \varepsilon_0 l}{\ln \dfrac{2hd}{br_0}}.$$

3.19. Die Gesetze des magnetischen Feldes des Gleichstroms und des elektrostatischen Feldes der Ladung

Wir wollen die Begriffe und Gesetzmäßigkeiten des magnetischen und des elektrischen Feldes gegenüberstellen, um dadurch Ähnlichkeiten und Gegensätze, die zwischen den Gesetzen dieser beiden Felder bestehen, klar hervorheben zu können. Es soll damit zugleich eine Zusammenfassung der in Kapitel 2 und 3 verfolgten Gedankengänge und des in diesen Kapiteln vermittelten Wissens gegeben werden.

Zusammenfassung

In der Umgebung eines elektrischen Stromes besteht ein magnetisches Feld, das mit einem Stromkreis von kleinen Abmessungen gemessen werden kann. Die magnetische Induktion

In der Umgebung einer elektrischen Ladung besteht ein elektrisches Feld, das mit einer Probeladung von kleinen Abmessungen gemessen werden kann. Die elektrische Feldstärke beträgt

beträgt definitionsgemäß

$$|\mathfrak{B}| = \frac{M}{dA \cdot I},$$

wobei M das den Probestromkreis beeinflussende Moment, wenn der Probestromkreis senkrecht auf seiner Ruhelage steht, dA die Fläche und I der Strom des Probestromkreises sind. Im Ruhezustand ist die Richtung von $\mathfrak{B}$ mit der Richtung von $d\mathfrak{A}$ identisch.

Sind der Leiter und der in ihm fließende Strom gegeben, so läßt sich $\mathfrak{B}$ mit Hilfe des BIOT-SAVARTschen Gesetzes berechnen:

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I\, d\mathfrak{l} \times \mathfrak{r}^0}{r^2}.$$

Führt man mit der Beziehung

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{B}}{\mu_0}$$

den Vektor der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ ein, so gelangt man zu der einfacheren Form

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{4\pi} \oint_L \frac{I\, d\mathfrak{l} \times \mathfrak{r}^0}{r^2}.$$

Aus dem BIOT-SAVARTschen Gesetz kann der wesentlich bedeutungsvollere Erregungssatz hergeleitet werden:

$$\oint_L \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A}.$$

Dieser gilt ganz allgemein, nicht nur im Vakuum. Die Differentialform des Erregungssatzes lautet

$$\text{rot}\, \mathfrak{H} = \mathfrak{G}.$$

definitionsgemäß

$$|\mathfrak{E}| = \frac{|\mathfrak{F}|}{q},$$

wobei q die Größe der Probeladung und $\mathfrak{F}$ die auf sie einwirkende Kraft darstellen. Die Richtung der Feldkraft ist bei positiver Ladung mit der Kraftrichtung identisch, bei negativer Ladung entgegengesetzt.

Ist die Ladungsverteilung gegeben, so läßt sich $\mathfrak{E}$ mit Hilfe des allgemeinen COULOMBschen Gesetzes berechnen:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int_V \frac{\varrho\, dV}{r^2} \mathfrak{r}^0.$$

Führt man mit der Beziehung

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}$$

den Vektor der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ ein, so gelangt man zu der einfacheren Form

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\varrho\, dV}{r^2} \mathfrak{r}^0.$$

Aus dem allgemeinen COULOMBschen Gesetz kann der GAUSSsche Satz der Elektrostatik hergeleitet werden:

$$\oint_A \mathfrak{D}\, d\mathfrak{A} = \int_V \varrho\, dV.$$

Dieser gilt ganz allgemein, nicht nur im Vakuum. Die Differentialform des GAUSSschen Satzes lautet

$$\text{div}\, \mathfrak{D} = \varrho.$$

Aus dem BIOT-SAVARTschen Gesetz ergibt sich auch die Grundgleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Bei bekannter Stromdichte werden also die Größen von $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{H}$ entweder mit Hilfe des BIOT-SAVARTschen Gesetzes oder mit Hilfe des Gleichungssystems

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G},$$
$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$
$$\mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{H}$$

bestimmt.

Das vorstehende Gleichungssystem hat dieselbe Form auch in Gegenwart von magnetischen Stoffen, wogegen das BIOT-SAVARTsche Gesetz in solchen Fällen versagt.

Die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes gibt die Möglichkeit, den theoretisch so wichtigen Begriff des Vektorpotentials durch die Gleichung

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$$

einzuführen.

Aus dem allgemeinen COULOMBschen Gesetz ergibt sich auch die Grundgleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0.$$

Bei bekannter Ladungsdichte werden also die Größen von $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{D}$ entweder mit Hilfe des allgemeinen COULOMBschen Gesetzes oder mit Hilfe des Gleichungssystems

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho,$$
$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0,$$
$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}$$

bestimmt.

Das vorstehende Gleichungssystem hat dieselbe Form auch in Gegenwart von dielektrischen Stoffen, wogegen das allgemeine COULOMBsche Gesetz in solchen Fällen versagt.

Die Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes gibt die Möglichkeit, den theoretisch und praktisch so wichtigen Begriff des skalaren Potentials durch die Gleichung

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U$$

einzuführen.

Beispiele und Ergänzungen

1. Die beiden gegenübergestellten Systeme scheinen auf den ersten Blick unabhängig zu sein. Wir wissen aber, daß der Strom durch ein elektrisches Feld hervorgerufen wird. Obzwar das stationäre Strömungsfeld im Innern der Leiter in Kapitel 5 eingehend untersucht werden wird, sprechen wir es auch hier in einem solchen Umfang durch, der zum Verständnis des nächsten Kapitels nötig ist.

Wenn wir zwei aufgeladene Elektroden (Abb. 177), z. B. zwei Platten eines ebenen Kondensators, mit einem Leiter verbinden, so erhalten wir einen Stromstoß durch diese Leitung. Wird aber die Spannung zwischen den Platten

durch einen Generator aufrechterhalten, so fließt ein stationärer Strom. Der Strom kommt dadurch zustande, daß im Innern des Leiters ein elektrisches Feld herrscht, das auf die freien Metallelektronen wirkt. Zwischen dem makroskopisch meßbaren Wert der Spannung U und der Stromstärke I besteht der

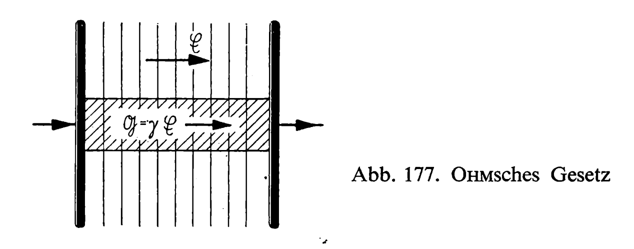


Abb. 177. OHMsches Gesetz

sehr einfache, häufig benutzte und eben deshalb vielleicht wichtigste Zusammenhang der Elektrotechnik, das OHMsche Gesetz:

$$U = IR.$$

Den Proportionalitätsfaktor R nennt man Widerstand. Er hängt von der Beschaffenheit und der Geometrie des Leiters in folgender Weise ab:

$$R = \varrho \frac{l}{A}.$$

Hierbei ist ϱ eine Materialkonstante (der spezifische Widerstand), l die Länge und A der Querschnitt des Leiters.

Durch das OHMsche Gesetz wird die Einheit des Widerstandes definiert:

Ein Leiter hat den Widerstand 1 V/A = 1 Ω, wenn eine Spannung von 1 V durch diesen Leiter gerade den Strom von 1 A treibt; oder mit anderen Worten, wenn durch 1 A Stromstärke am Widerstand ein Spannungsabfall von 1 V verursacht wird.

Das OHMsche Gesetz zeigt sogleich, daß ein Widerstand durch die Messung zusammengehöriger Strom- und Spannungswerte bestimmt werden kann.

2. Mit Hilfe des OHMschen Gesetzes kann man das sehr oft benutzte Voltmeter konstruieren. Wir schalten einen großen Widerstand in Reihe mit einem empfindlichen Milliamperemeter oder Galvanometer. Dann wird die Anzeige des Galvanometers proportional der an den Klemmen (1) – (2) liegenden Spannung sein (Abb. 178).

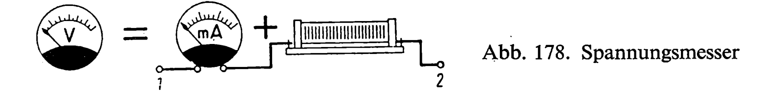


Abb. 178. Spannungsmesser

Das ballistische Galvanometer mißt unmittelbar den Stromstoß

$$\int_0^\tau i\,dt.$$

Wenn der Widerstand R des ganzen Kreises, in dem dieser Stoß entsteht, bekannt ist, so mißt das Galvanometer ebenfalls den Spannungsstoß

$$\int_0^\tau U\,dt = \int_0^\tau Ri\,dt.$$

Dieses Instrument eignet sich also schlechthin zum Messen des Integrals schnell verlaufender Spannungsvorgänge.

3. Das OHMsche Gesetz vermittelt den Zusammenhang zwischen zwei makroskopischen, meßbaren Größen U und I. Um zur physikalisch primären Gleichung zwischen Feldstärke und Stromdichte zu gelangen, schreiben wir

$$U = IR = \frac{I \cdot \varrho \cdot l}{A} = \varrho\, Gl$$

und erhalten

$$\frac{U}{l} = \varrho G$$

oder in allgemeingültiger vektorieller Form

$$\mathfrak{E} = \varrho \mathfrak{G} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{G} = \gamma \mathfrak{E}.$$

Dieser Zusammenhang stellt das OHMsche Gesetz in differentieller Form dar. γ bedeutet hier die spezifische Leitfähigkeit.

Der Strom bedeutet einen ständigen Ladungstransport vom höheren Potential zum niedrigeren. Es wird also ständig die Arbeit UI pro Sekunde vom Generator geleistet. Diese Leistung wandelt sich in Wärme um. Es wird

$$P_{\text{Gen}} = P_{\text{Wärme}} = UI = I^2 R.$$

Diese JOULEsche Gleichung kann in differentielle Form umgeschrieben werden:

$$UI = ElGA = EGV,$$

wobei V das Volumen des Leiters ist.

$$p = \mathfrak{E}\mathfrak{G} = \varrho \mathfrak{G}^2 = \gamma \mathfrak{E}^2$$

ist also die Leistung oder Wärmeentwicklung pro Volumeneinheit, d. h. die Leistungsdichte. Damit haben wir das JOULEsche Gesetz in Differentialform erhalten.

4. Wir haben die Zahlenwerte der auf das Vakuum bezogenen Konstanten ε_0, μ_0 als Meßergebnis erhalten. Diese Werte hängen von der Wahl der elektrischen Einheiten ab. Es ist aber bemerkenswert, daß das Produkt $\varepsilon_0\mu_0$ nach Größe und Dimension gerade den reziproken Wert des Quadrats der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ergibt:

$$\varepsilon_0\mu_0 = 8{,}855 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = \frac{1}{c^2} \approx \frac{1}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2}$$

oder in anderer Form

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

Diese quantitative Übereinstimmung bildete früher den Ausgangspunkt und bildet heute eine der Grundlagen für die elektromagnetische Theorie des Lichtes.

4. Der unmittelbare Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldern

Zeitliche Änderung des magnetischen Feldes — Elektrisches Wirbelfeld

4.1. Das FARADAYsche Induktionsgesetz

4.1.1. *Integralform des Induktionsgesetzes*

Die bisherigen Betrachtungen ließen erkennen, daß im Vakuum das stationäre magnetische Feld und das statische elektrische Feld für sich allein und voneinander völlig unabhängig vorkommen können. Ist ein Stoff mit einer endlichen elektrischen Leitfähigkeit zugegen, so besteht schon ein gewisser Zusammenhang zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld. Durch das elektrische Feld wird nämlich im Leiter ein Strom erzeugt, der wiederum ein magnetisches Feld hervorruft. Zwischen sich zeitlich ändernden Feldern besteht nun ein enger, ganz allgemein gültiger Zusammenhang. Mit dem veränderlichen magnetischen Feld hängt ein elektrisches Feld, mit dem veränderlichen elektrischen Feld ein magnetisches Feld zusammen. In diesem Kapitel soll die erste Erscheinung untersucht werden. Sie wird durch das Induktionsgesetz beschrieben.

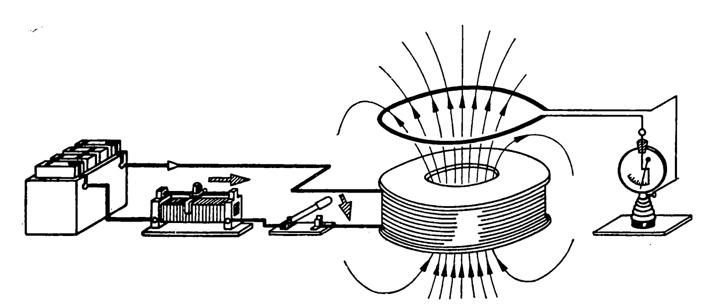


Abb. 179. Versuchsanordnung zur Erläuterung des Induktionsgesetzes

Befindet sich in einem durch seine Induktionslinien gekennzeichneten magnetischen Feld ein beliebiger geschlossener Leiter (Abb. 179) und ändert sich die Zahl der von dem Leiter umschlossenen Kraftlinien aus irgendeinem Grund, so entsteht in dem geschlossenen Leiter eine Spannung, oder, wie man

zu sagen pflegt, es wird eine Spannung „induziert". Die Größe der induzierten Spannung ist der während der Zeiteinheit stattgefundenen Änderung des durch den Leiter umgrenzten magnetischen Flusses oder, genauer gesagt, der nach der Zeit gebildeten Ableitung des Flusses proportional:

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{4.1.1}$$

In dieser Gleichung lautet die Maßeinheit der rechten Seite Vs/s = V. Hier zeigt sich wieder der Vorteil des MKS-Systems, in dem der Proportionalitätsfaktor des Induktionsgesetzes gleich Eins wird.

Das negative Vorzeichen in (4.1.1) muß etwas näher erörtert werden. Bekanntlich sind die Richtungen einer Fläche und ihrer Randkurve so anzugeben, daß die Richtung des positiven Umlaufsinnes der Kurve der positiven Flächennormalen gemäß dem Drehsinn einer Rechtsschraube zugeordnet ist. Durch das Flächenintegral wird aber eine positive Zahl geliefert, wenn der Vektor der Induktionsänderung eine Projektion besitzt, die in die Richtung der positiven Normalen fällt. (Der Einfachheit halber sei ein homogenes Feld vorausgesetzt.) Im entgegengesetzten Fall erhält man eine negative Zahl. Die im geschlossenen Kreis induzierte Spannung wird positiv genannt, wenn sie die positiven Ladungen in Richtung des positiven Umlaufsinnes fortzubewegen trachtet. Dies bedeutet aber auch, daß bei einer Unterbrechung des Stromkreises die elektrostatische Spannungsdifferenz

$$U_{AB} = U_A - U_B,$$

die zwischen den Unterbrechungsstellen auftritt, sich dann als positiv ergibt, wenn man sich in positiver Umlaufrichtung bewegt. Das negative Vorzeichen besagt also, daß die induzierte Spannung negativ sein wird, wenn die Induktionsänderung in Richtung der positiven Flächennormalen zeigt, d. h. der positiven Umgehungsrichtung entgegengesetzt wirkt. Diese Tatsache kann, wenn man will, auch so zum Ausdruck gebracht werden, daß die Spannungsrichtung der Richtung der Flußänderung so zugeordnet ist wie der Drehsinn einer Linksschraube (Abb. 180). Wenn nun ein und derselbe Kraftfluß von einer Leitung in Form einer Spule N-fach umfaßt wird, so ist die induzierte Spannung

$$U_i = -N\frac{d\Phi}{dt}. \tag{4.1.2}$$

Abb. 180 zeigt die Richtung der induzierten Spannung bei einem zunehmenden bzw. abnehmenden, jedoch der Richtung nach gleichbleibenden Kraft-

fluß. Solange der Kraftfluß gleichmäßig zunimmt, weist die induzierte Spannung ständig in dieselbe Richtung und ist konstant. Wenn die Änderung des Kraftflusses aufhört, verschwindet auch die induzierte Spannung. Falls der Kraftfluß im entgegengesetzten Sinn geändert wird, entsteht eine Spannung entgegengesetzter Richtung.

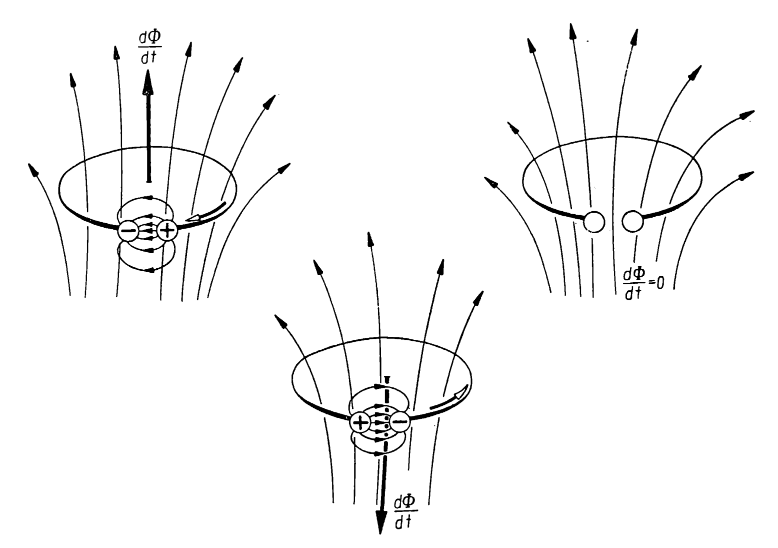


Abb. 180. Richtung der induzierten Spannung

Beispiele und Ergänzungen

1. Wenn der Kraftfluß gleichmäßig zunimmt (Abb. 181), und zwar von Null zur Zeit $t = 0$ bis auf den Wert $10 \cdot 10^{-2}$ Vs zur Zeit $t = 10$ s, so ist in jedem beliebigen Zeitpunkt die auf die Zeiteinheit entfallende Änderung des Kraftflusses

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{10 \cdot 10^{-2}\ \text{Vs}}{10\ \text{s}} = -10^{-2}\ \text{V}.$$

Dies ergibt gleichzeitig auch den Wert der induzierten Spannung des Leiters in Volt. Wenn jetzt der Kraftfluß mit gleicher Geschwindigkeit abnimmt, erhalten wir eine genauso große, jedoch entgegengesetzt gerichtete Spannung. Die Änderung des Kraftflusses und der Verlauf der induzierten Spannung sind in Abb. 181 dargestellt.

2. Wenn sich der Kraftfluß entsprechend der Abb. 182 gemäß dem Sinusgesetz ändert, dann haben zur Zeit $t = 0$ die Kraftflußänderung und damit

die induzierte Spannung ihren größten Wert. Da die zeitliche Änderung des Kraftflusses immer kleiner wird, nimmt auch der Wert der induzierten Spannung ab und wird gleich Null, wenn der Kraftfluß seinen Höchstwert erreicht.

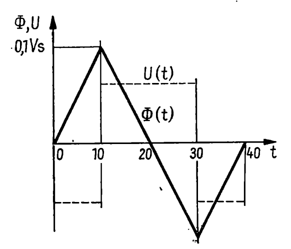


Abb. 181. Linear veränderlicher Kraftfluß

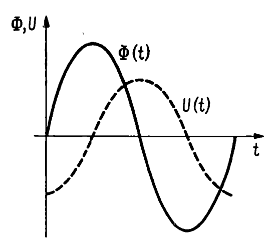


Abb. 182. Sinusförmig veränderlicher Kraftfluß

Wenn der Kraftfluß weiter abnimmt, wird die Spannung natürlich die entgegengesetzte Richtung haben. Aus dem Induktionsgesetz folgt, daß die induzierte Spannung einen Kosinusverlauf hat:

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d[\Phi_0 \sin \omega t]}{dt} = -\omega\Phi_0 \cos \omega t, \tag{4.1.3}$$

dessen Amplitude um so größer ist, je größer die Amplitude des Kraftflusses und die Frequenz der Kraftflußänderung sind.

3. Die Abb. 183 soll veranschaulichen, aus welchen Gründen sich der Kraftfluß, der von einem Leiter umfaßt wird, ändern kann. Im ersten Fall wird der magnetische Kraftfluß verändert, indem in der Nähe des Leiters ein Permanentmagnet bewegt wird. Im zweiten Fall wird der Kraftfluß dadurch geändert, daß neben der Leiterspule eine andere Spule angebracht wird, in der die Stromstärke geändert wird. Dann ändert sich der Kraftfluß in der ersten Spule, und es wird darin eine Spannung induziert. Das ist das Wirkungsprinzip eines Transformators. Im dritten Fall wird der von einem Leiter umfaßte Kraftfluß verändert, indem der im Leiter selbst fließende Strom geändert wird, z. B. dadurch, daß an ihn plötzlich eine Spannung gelegt wird. In diesem Fall fließt in der Spule ein Strom, der ein sich zeitlich änderndes magnetisches Feld erzeugt, welches in derselben Spule eine Spannung induziert. Dies führt zur Erscheinung der Selbstinduktion.

4.1.2. *Das Induktionsgesetz in Differentialform. Die zweite* MAXWELL*sche Gleichung*

Die induzierte Spannung hat den Charakter einer Kraft, welche offenbar die Ladungen zu trennen vermag, weil durch sie an den beiden Endpunkten

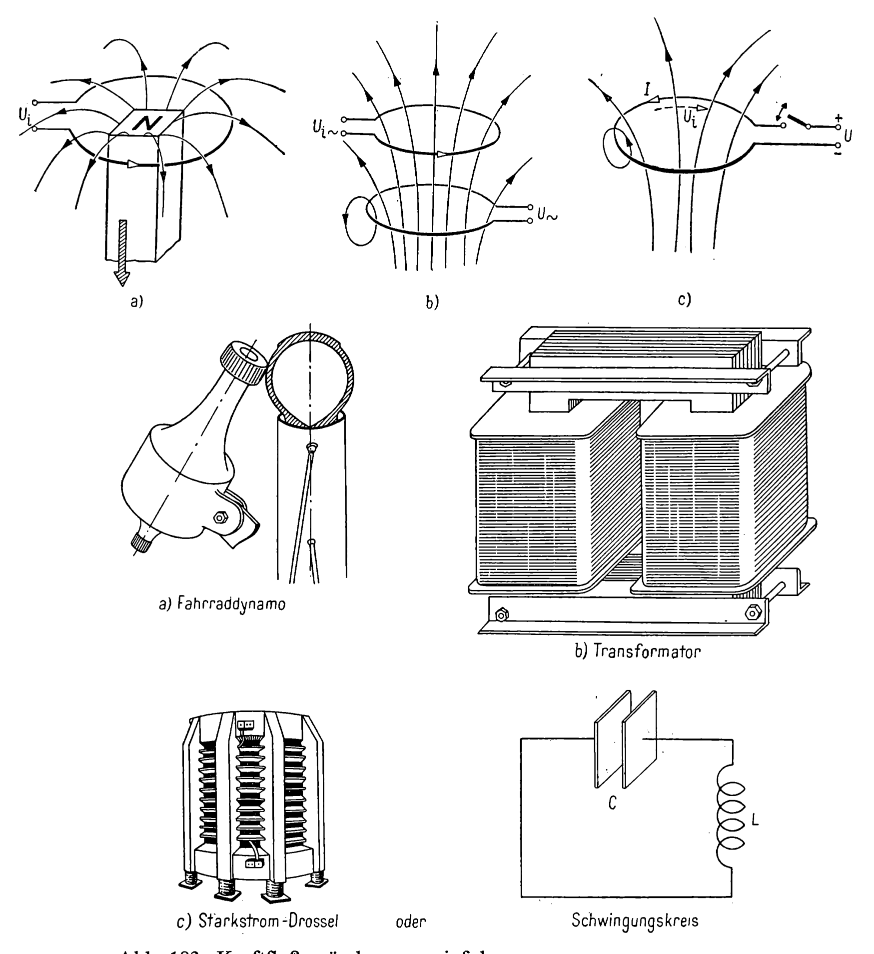


Abb. 183. Kraftflußveränderungen infolge

a) Bewegung eines Permanentmagneten; b) Änderung der Stromstärke in einem anderen Stromkreis; c) Änderung der Stromstärke im selben Kreis

des Leiters der Abb. 180 freie elektrische Ladungen erscheinen. Ein Ausgleich dieser Ladungen kann nur durch eine im Innern des Leiters gleichzeitig entstehende induzierte elektrische Feldstärke verhindert werden. Die induzierte Spannung kann daher auch als Linienintegral dieser Feldstärke angesehen werden, d. h.

$$U_i = \oint_L \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l}. \tag{4.1.4}$$

Dann lautet das Induktionsgesetz

$$U_i = \oint_L \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{4.1.5}$$

Wir können das Induktionsgesetz auch so formulieren: Die induzierte Spannung längs einer beliebigen geschlossenen Linie ist gleich der zeitlichen Änderung des Kraftflusses, der von der Linie umschlossen wird. Es ist nun nicht notwendig, daß diese geschlossene Linie ein Leiter ist, es kann eine beliebige immaterielle Raumkurve sein. Das in den verschiedenen Punkten des Raumes herrschende elektrische Feld besteht aber nicht nur fiktiv, sondern besitzt einen wohldefinierten, durch eine Probeladung meßbaren Wert. Es ergibt sich also das überraschende Ergebnis, daß das Linienintegral der Feldstärke längs einer beliebigen geschlossenen Linie nicht gleich Null ist. Wenn man mit einer Probeladung in einem magnetischen Wechselfeld auf einem geschlossenen Weg zum Ausgangspunkt zurückkehrt, wird die durch das Feld geleistete Arbeit nicht Null sein. Durch einmalige Entlangführung der Ladung im Feld kann eine bestimmte Arbeit gewonnen werden. Wenn man sie oftmals nacheinander herumführt, können theoretisch beliebig große Energiewerte erzielt werden. Auf diesem Prinzip beruht z. B. das Betatron, welches Elektronen auf eine Geschwindigkeit entsprechend einer Beschleunigungsspannung von 10^8 V beschleunigen kann.

Die allgemeine qualitative Fassung des Induktionsgesetzes lautet: Überall im Raum, wo sich die magnetische Feldstärke ändert, entsteht eine elektrische Feldstärke. Dieses elektrische Kraftfeld unterscheidet sich aber vom elektrostatischen Kraftfeld dadurch, daß es kein Potentialfeld, sondern ein Wirbelfeld ist.

Wir können das Induktionsgesetz in die Differentialform umschreiben. Nach (4.1.5) gilt zunächst

$$U_i = \oint_L \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \mathfrak{B}\, d\mathfrak{A}.$$

Dabei ist der Kraftfluß durch jene Fläche zu berechnen, die von der fraglichen geschlossenen Linie berandet wird. Diese Beziehung ist für jede Linie und, bei einer beliebig gewählten geschlossenen Linie, für jede darüber gespannte Fläche gültig. Das Linienintegral der linken Seite kann mit Hilfe des STOKESschen Satzes in ein Flächenintegral umgewandelt werden:

$$\oint_L \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = \int_A \operatorname{rot} \mathfrak{E}\, d\mathfrak{A},$$

so daß das Induktionsgesetz lautet:

$$\int_A \operatorname{rot} \mathfrak{E}\, d\mathfrak{A} = \int_A \left(-\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right) d\mathfrak{A}.$$

Da diese Beziehung für jede Fläche gültig ist, kann man auf die Gleichheit der Integranden schließen. Es wird also

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}.$$

Dieser grundlegende Zusammenhang bedeutet, in Worten ausgedrückt, daß die Rotation des elektrischen Feldes gleich der zeitlichen Änderung des magnetischen Feldes ist. Qualitativ drückt es die wesentliche Tatsache aus, daß die zeitliche Änderung der Induktion mit dem Auftreten einer elektrischen Feldstärke verknüpft ist. Darüber hinaus besagt es, daß das so entstandene elektrische Feld ein Wirbelfeld ist, da es eine nichtverschwindende Rotation besitzt. Zur vollständigen Kenntnis des Vektorfeldes müssen auch seine Quellen angegeben werden. Die Quellen des elektrischen Feldes sind bekannt: Die elektrischen Kraftlinien beginnen und enden an den Ladungen im Sinne der Beziehung

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon}.$$

Wenn keine Ladungen vorhanden sind, müssen also die Linien des elektrischen Feldes geschlossen sein.

Für das Zustandekommen der Feldstärke ist die Anwesenheit eines geschlossenen Leiters überhaupt nicht notwendig. Wenn sich z. B. in der Um-

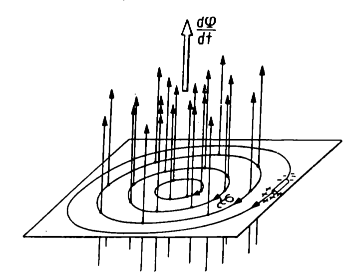


Abb. 184. Geschlossene elektrische Kraftlinien in Anwesenheit eines geschlossenen Leiters

gebung eines wechselnden Kraftflusses ein kurzes Stück eines Leiters befindet (Abb. 184), so entsteht auch darin eine Spannung, welche durch das für dieses Stück Leitung berechnete Linienintegral des elektrischen Feldes bestimmt wird.

In sehr anschaulicher Weise kann man sich von der Existenz der geschlossenen elektrischen Kraftlinien überzeugen: Wenn man mit Hilfe eines sehr

schnell anwachsenden Magnetfeldes ein sehr starkes elektrisches Wirbelfeld erzeugt, das ein stark verdünntes Gas in einem Gefäß ionisiert, so entsteht eine sogenannte Ringentladung ohne Elektroden (Abb. 185).

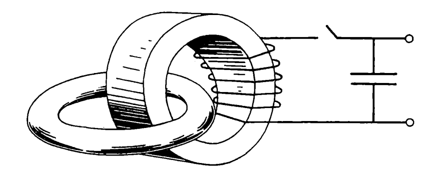


Abb. 185. Die Entladung eines sehr großen aufgeladenen Kondensators verursacht ein sehr schnell anwachsendes magnetisches Feld in einem Eisenring. Dadurch entsteht in einem gasgefüllten Toroid ein elektrisches Wirbelfeld, welches zu einer Ringentladung von 10^6 A Stromstärke führen kann

4.2. Anwendung des Induktionsgesetzes auf einfache Stromkreise

Nach dem Induktionsgesetz entsteht überall dort, wo sich die magnetische Induktion zeitlich ändert, ein elektrisches Feld. Durch das Linienintegral dieses elektrischen Feldes wird die induzierte Spannung geliefert:

$$U_i = \oint_L \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Das elektrische Feld entsteht ganz unabhängig davon, ob sich in der Nähe des magnetischen Feldes ein geschlossener Leiter oder überhaupt ein Leiter befindet. Der geschlossene Leiter summiert sozusagen das elektrische Feld und zeigt es auch an. Zwischen den Enden eines unterbrochenen Stromkreises kann man eine Spannungsdifferenz feststellen, weil im Innern des Leiters

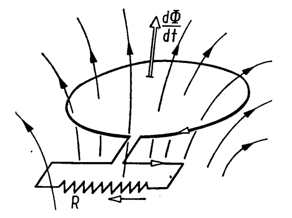


Abb. 186. Induktionsgesetz eines einfachen Stromkreises

auf die Elektronen die aus der induzierten Spannung sich ergebende Kraft wirkt. Sie kompensiert die Abstoßungskräfte der Ladungen, die sich an den Enden der Leitung angehäuft haben. Wird die bisher offene Leiterschleife

über einen Widerstand geschlossen (Abb. 186), erhält man nach der Beziehung

$$I = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

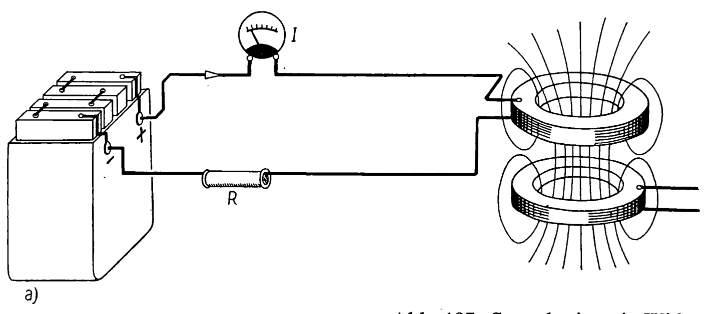
einen Strom. Das Induktionsgesetz kann daher in diesem Fall in der Form

$$IR = -\frac{d\Phi}{dt}$$

geschrieben werden.

Wir betrachten nun den in der Abb. 187a dargestellten Stromkreis. Die Stromquelle möge eine zeitlich konstante (oder auch eine zeitlich veränderliche) Spannung U_e besitzen. Die äußere Stromquelle bedingt im Kreis die Stromstärke

$$I_e = \frac{U_e}{R}.$$



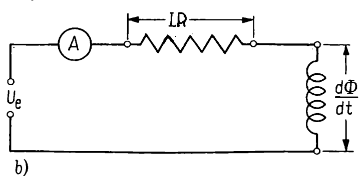


Abb. 187. Stromkreis mit Widerstand und Induktivität; Φ wird im allgemeinen nicht nur durch I, sondern auch durch den Strom in einem anderen Stromkreis erregt

Die gesamte Stromstärke im Kreis beträgt dann

$$I = \frac{U_e}{R} - \frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt},$$

woraus man die Beziehung

$$U_e = IR + \frac{d\Phi}{dt} \tag{4.2.1}$$

erhält.

Diese Gleichung pflegt man so zu deuten, daß die äußere Spannung den ohmschen und den induktiven Spannungsabfall zu überwinden hat, d. h., es muß die äußere Spannung der ohmschen und induktiven Spannung das Gleichgewicht halten (Abb. 187b).

Bei komplizierteren Stromkreisen ist zunächst zu untersuchen, über welche Fläche bei der Berechnung des magnetischen Kraftflusses die Induktion integriert werden muß. Grundsätzlich hat die Integration über die ganze vom geschlossenen Leiter umspannte Fläche zu erfolgen. Es kommt aber oft vor, daß im größten Teil des Stromkreises die magnetische Feldstärke sehr klein ist. Wenn man z. B. das magnetische Feld eines Stromkreises untersucht, der ein Solenoid einschließt, muß man in erster Linie über die durch die Windungen des Solenoids aufgespannte Fläche integrieren, während im übrigen zwar die durch die Leitung umfaßte Schleife groß, die Induktion dort aber klein ist. Oft ist das magnetische Feld groß, doch wird der umschlossene

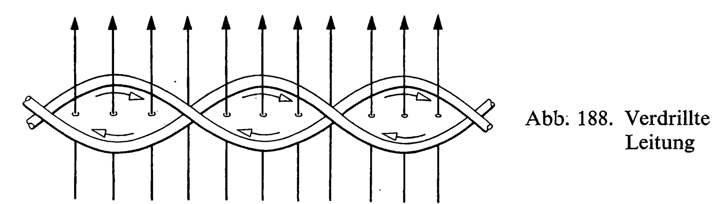


Abb. 188. Verdrillte Leitung

Kraftfluß künstlich auf Null gesetzt, z. B. dadurch, daß man die Leiter eng aneinanderlegt oder die Leitungen verdrillt (Abb. 188). Wenn der magnetische Kraftfluß für den geschlossenen Kreis berechnet wird, dann heben sich in den Schleifen der verdrillten Leiter die entstandenen Spannungen auf.

In manchen Fällen, besonders bei Spulen mit vielen Windungen, kann die Frage dadurch vereinfacht werden, daß man einen homogenen Kraftlinienverlauf annimmt (Abb. 189), wobei dann jede Kraftlinie bei N Windungen

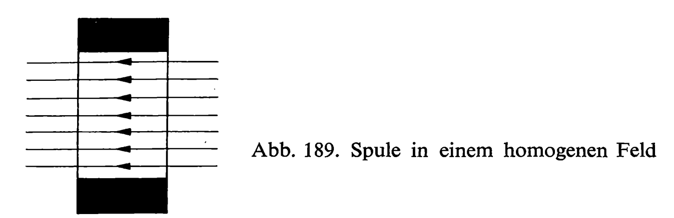


Abb. 189. Spule in einem homogenen Feld

N Windungsflächen durchstößt. Der Wert der induzierten Spannung ist dann, sofern diese Vereinfachungen zulässig sind,

$$U_i = -N\frac{d\Phi}{dt},$$

wobei Φ der Kraftfluß einer Windung ist. In Wirklichkeit geht durch jede Windungsfläche eine verschiedene Anzahl von Kraftlinien hindurch (Abb. 190). Eine genaue Berechnung, die dies berücksichtigt, ist sehr schwierig.

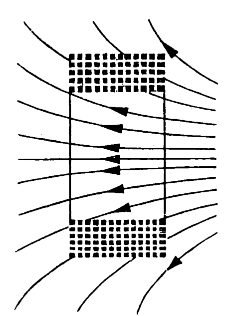


Abb. 190. Wenn eine Spule in ein inhomogenes äußeres Feld gebracht wird, muß der verkettete Fluß $\Sigma N_i \Phi_i$ bestimmt werden

Schalten wir nun in den Stromkreis noch einen Kondensator ein (Abb.191a), so gilt auch für diesen Kreis das Induktionsgesetz in der Form der Gleichung (4.1.5). Im Innern des homogenen Leiters ergibt das Linienintegral der Feld-

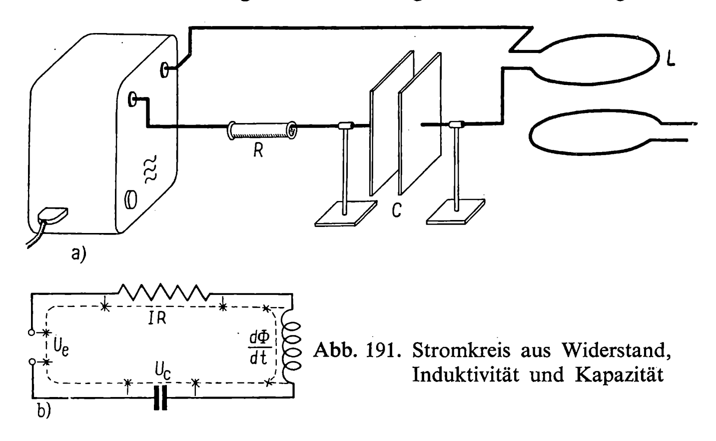


Abb. 191. Stromkreis aus Widerstand, Induktivität und Kapazität

stärke die ohmsche Spannung, zwischen den Klemmen der äußeren Stromquelle deren Spannung, zwischen den Platten des Kondensators die Spannung des Kondensators, wenn man die Integration für den in der Abb. 191b gezeichneten Kreis durchführt. Wir erhalten somit die Beziehung

$$IR + U_c - U_e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

oder

$$U_e = IR + U_c + \frac{d\Phi}{dt}.$$

Die äußere Stromquelle hat hier also den ohmschen, den induktiven und den kapazitiven Spannungsabfall zu überwinden.

Beispiele und Ergänzungen

1. Wir wollen jetzt annehmen, daß der Fluß Φ nur durch den Strom im Stromkreis selbst hervorgerufen wird. Wir untersuchen also den Kreis mit Selbstinduktivität. Dann ruft eine zeitliche Änderung des Stromes eine entsprechende Änderung des Flusses und damit wieder eine Spannung, die Selbstinduktionsspannung, hervor.

Die Gleichung (4.2.1) liefert jetzt für den in Abb. 187b gezeichneten Stromkreis

$$U_e = IR + L\frac{dI}{dt}, \tag{4.2.2}$$

da $\Phi = LI$ ist.

Wenn sich im Kreis kein ohmscher Widerstand befindet, vereinfacht sich (4.2.2) zu

$$U_e = L\frac{dI}{dt} \tag{4.2.3}$$

oder, wenn keine äußere Spannungsquelle vorhanden ist, zu

$$0 = IR + L\frac{dI}{dt}. \tag{4.2.4}$$

a) Ist für einen Stromkreis die Gleichung (4.2.3) gültig und ist die Spannung gegeben und der Strom gesucht, dann gilt

$$I = \frac{1}{L}\int_0^t U_e\,dt + C.$$

Bei einer sinusförmigen Spannung $u = U_0 \sin \omega t$ wird die Stromstärke

$$I = -\frac{U_0}{L\omega}(\cos \omega t - 1) + C$$

und, bei geeigneter Wahl der Konstanten ($C = -U_0/L\omega$),

$$I = -\frac{U_0}{L\omega}\cos \omega t.$$

Wenn dagegen die Spannung konstant ist, wird ihr nur durch einen ohmschen Spannungsabfall das Gleichgewicht gehalten. Wenn $R = 0$ ist, wächst der Strom gleichmäßig mit der Zeit über alle Grenzen.

b) Wenn die zeitliche Ableitung der Stromstärke bekannt ist, läßt sich über den entstehenden induktiven Spannungsabfall folgendes sagen. Ändert sich die Stromstärke sehr schnell, so lassen sich sehr große Spannungen erzeugen. Beim Ausschalten großer Induktivitäten z. B. können unerwartet große Spannungen entstehen, die über den Ausschaltfunken zu Bogenentladungen oder zu zerstörenden Durchschlägen führen.

2. In einer Spule mit den Daten

$$l = 0{,}4\,\mathrm{m}, \quad d = 0{,}15\,\mathrm{m}, \quad N = 3000, \quad I = 5\,\mathrm{A}$$

wird der Strom ausgeschaltet. Welche Spannung entsteht zwischen den beiden Enden der Spule, wenn wir annehmen, daß die Stromstärke in $T = 10^{-3}$ s linear auf Null absinkt?

$$U_i = -N\frac{d\Phi}{dt}\,; \quad \Phi = BA = \mu_0 HA,$$

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{3\cdot 10^3\cdot 5}{0{,}4}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = 3{,}75\cdot 10^4\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}},$$

$$B = \mu_0 H = 1{,}256\cdot 10^{-6}\cdot 3{,}75\cdot 10^4\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = 4{,}7\cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2},$$

$$\Phi = BA = 4{,}7\cdot 10^{-2}\,\frac{0{,}15^2\pi}{4}\,\mathrm{Vs} = 8{,}3\cdot 10^{-4}\,\mathrm{Vs},$$

$$U = N\frac{d\Phi}{dt} = N\frac{\Phi}{T} = 3\cdot 10^3\,\frac{8{,}3\cdot 10^{-4}}{10^{-3}}\,\mathrm{V} \approx 2500\,\mathrm{V}.$$

Die Stromstärke nimmt in Wirklichkeit natürlich nicht linear ab, und das Zeitintervall T kann meistens nicht willkürlich angenommen werden. Denken wir nur daran, daß mit $T = 10^{-6}$ s eine Spannung von $2{,}5\cdot 10^6$ V entstehen würde, was sicher nicht auftreten kann. Die höchste Spannung ergibt sich, wenn die Schaltung den Strom momentan, d. h. in $T = 0$ s, unterbrechen würde. Dann ergäbe die Gleichung (4.2.3) eine unendlich große Spannung. Hier beginnt aber die Eigenkapazität der Spule eine Rolle zu spielen.

3. Es soll ein Normalwiderstand aus Manganin von 1 Ω mit Hilfe einer Normalgegeninduktivität geeicht werden.

Die Schaltung ist in der Abb. 192 angegeben. Im Stromkreis (1) mit dem zu eichenden Widerstand R und der einen Spule der Eichinduktivität fließt ein konstanter Strom. Wenn nun der Strom in gleichen Zeitabständen T kommutiert wird, so entstehen bestimmte und gut berechenbare Spannungsstöße im

Kreis (2). Da diese verschiedene Vorzeichen haben, kann die am Widerstand abfallende Gleichspannung hiermit nicht kompensiert werden. Darum muß der Strom im Kreis (2) auch kommutiert werden, und zwar synchron zu Kreis (1). Dadurch entsteht im Kreis (2) eine Spannung von stets gleicher Polarität, mit

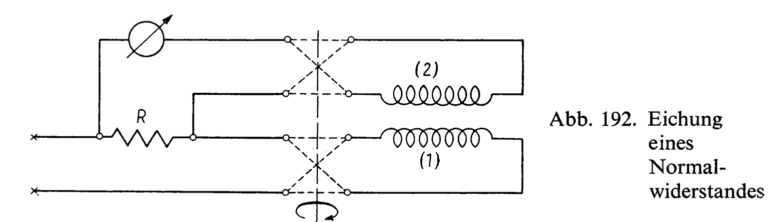


Abb. 192. Eichung eines Normalwiderstandes

der die am Widerstand abfallende Spannung kompensiert werden kann. Die Güte der Kompensation ist aus dem Nullausschlag des Strommessers ersichtlich. Fließt kein Strom, so stimmen ohmsche und induzierte Spannung überein. Die Voraussetzung dafür ist, daß der zeitliche Mittelwert U der Spannung die Gleichung

$$U = \frac{1}{T}\int_0^T M\frac{dI}{dt}\cdot dt = \frac{M}{T}\int_{-I}^{+I} dI = \frac{2MI}{T} = RI$$

erfüllt. Für die Größe des Widerstandes folgt daraus

$$R = 2M/T.$$

Der Widerstand kann also durch Berechnung einer Normalgegeninduktivität und durch eine Zeitmessung geeicht werden. Es ist zu bemerken, daß im Endergebnis die Stromstärke nicht auftritt. Man muß nur darauf achten, daß sie konstant bleibt. In der Praxis der Präzisionsmessungen wählt man μ_0 definitionsgemäß gleich $4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am, dann wird der Wert von M berechnet und danach der Normalwiderstand geeicht.

4. Die elektrischen Wirbelfelder haben Eigenschaften, die auf den ersten Blick recht ungewohnt sind. Die geschlossenen Kraftlinien sind uns zwar von den magnetischen Feldern her bekannt. Die begriffliche Schwierigkeit bei elektrischen Feldern entsteht in erster Linie dadurch, daß man zur Messung des Linienintegrals $\int \mathfrak{E} d\mathfrak{l}$ ein Voltmeter verwendet, mit dem wir gewohnt sind, stets die Spannung zwischen zwei Punkten zu messen. Dadurch drängt sich der Schluß auf, daß die Spannung in jedem Fall unabhängig von dem jeweiligen Ort des Meßinstrumentes existiert. Sofern wir jedoch im Wirbelfeld sind, besteht solche Eindeutigkeit nicht mehr.

Die Eigenschaften der elektrischen Wirbelfelder können anschaulich am besten studiert werden, wenn Φ linear mit der Zeit anwächst, wenn also $d\Phi/dt$

konstant bleibt. Dann entsteht ein *örtlich veränderliches*, aber *zeitlich konstantes* elektrisches Wirbelfeld. Die Messungen können in einem solchen Feld mit Gleichstrominstrumenten vorgenommen werden.

5. In einem Eisenkern sei ein zeitlich linear veränderlicher Kraftfluß Φ vorhanden. Der Eisenkern sei von einem leitenden Ring umgeben, dessen Widerstand R ist (Abb. 193). Was zeigt ein Spannungsmesser mit unendlich großem Innenwiderstand an, wenn wir den Punkt O festhalten und die Lage des Punktes P verändern?

Die induzierte Spannung sei U_0. Dann gilt

$$U_0 = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

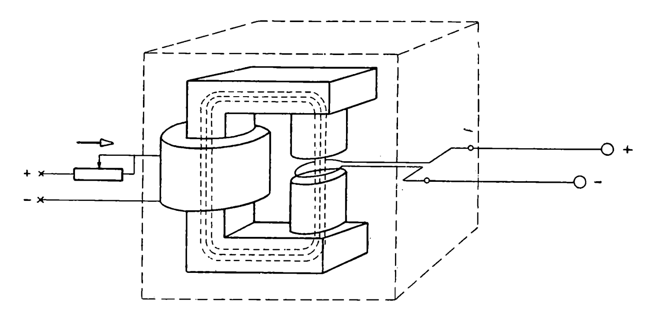


Abb. 193a. Im Luftspalt eines Eisenkerns kann ein zeitlich konstantes elektrisches Wirbelfeld durch eine lineare Änderung des magnetischen Flusses erzeugt werden

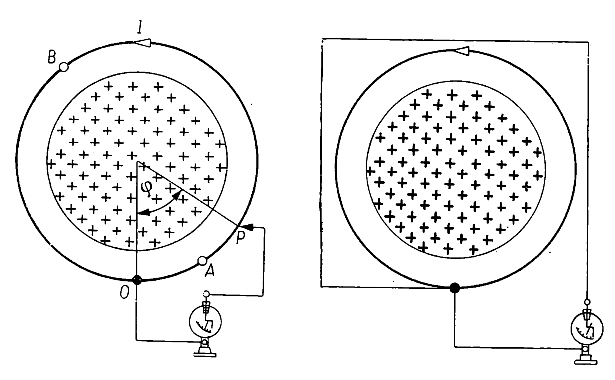


Abb. 193b. Die Spannung zwischen einem Fixpunkt und einem Laufpunkt auf einem homogenen, das Wirbelfeld umschlingenden leitenden Ring wächst bis zur Windungsspannung, wenn der Laufpunkt längs des Ringes zum Fixpunkt zurückkehrt

Im Ring fließt ein Strom

$$I = \frac{U_0}{R}.$$

Die Spannung am Spannungsmesser kann auf zwei Arten berechnet werden.

a) Der Spannungsmesser wird an den beiden Punkten O und P angeschlossen. Die Spannung zwischen den Punkten O und P ist dann gleich der ohmschen Spannung

$$U = R_{OP}\, I = \frac{R_{OP}}{R}\, U_0 = \frac{\varphi}{2\pi}\, U_0 .$$

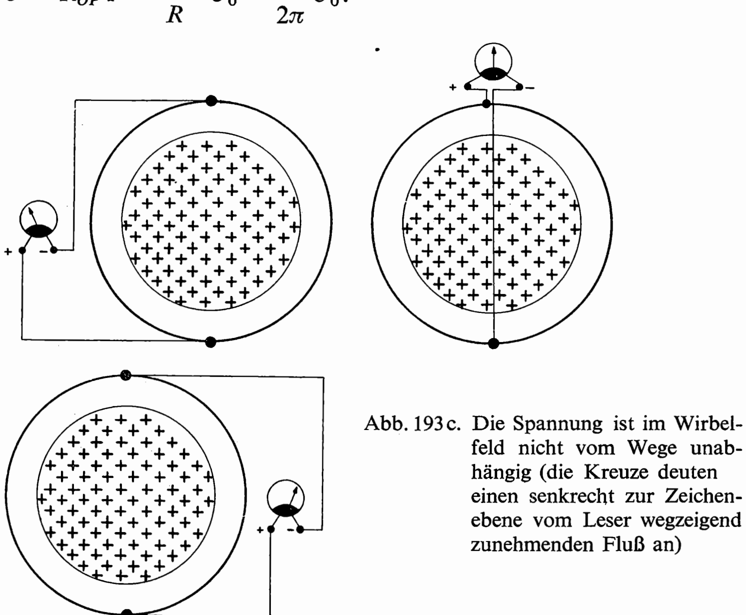


Abb. 193c. Die Spannung ist im Wirbelfeld nicht vom Wege unabhängig (die Kreuze deuten einen senkrecht zur Zeichenebene vom Leser wegzeigend zunehmenden Fluß an)

b) Der Spannungsmesser soll diesmal die Spannung entlang der Strecke OBP messen. In diesem Fall wirkt im Kreis die Differenz zwischen der induzierten Spannung und der ohmschen Spannung der Strecke PO:

$$U = U_0 - R_{PO}\, I = U_0 - \frac{R_{PO}}{R}\, U_0 = U_0 - \frac{R - R_{OP}}{R}\, U_0 = \frac{\varphi}{2\pi}\, U_0 ,$$

wie im Falle a).

Wenn wir das Zuleitungskabel mehrmals um den Eisenkern schlingen, dann ist $\varphi > 2\pi$, und der Spannungsmesser zeigt eine größere Spannung als U_0 an.

In Abb. 194 ist das so entstandene Wirbelfeld einem Potentialfeld gegenübergestellt.

Abb. 194. Spannungsverhältnisse im Wirbelfeld und Potentialfeld

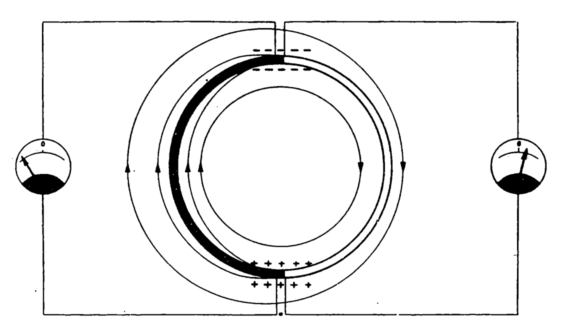


Abb. 194a. Wenn wir einen inhomogenen Ring annehmen, so entsteht ein elektrisches Quellen- und Wirbelfeld

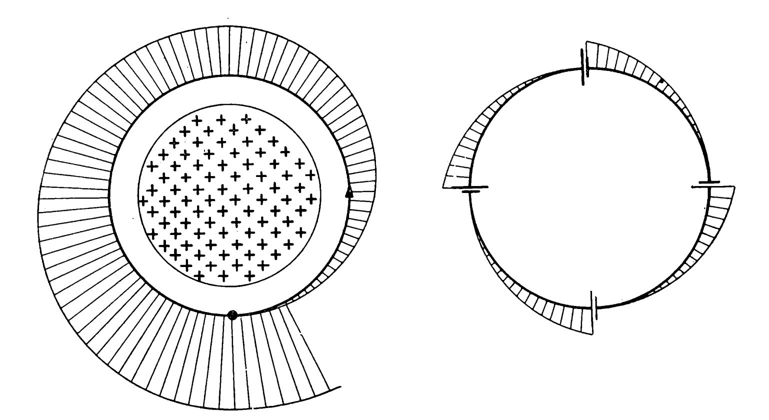


Abb. 194b. Das Linienintegral der Feldstärke in einem Wirbelfeld führt zu einer mehrdeutigen Spannung; in einem Potentialfeld erhalten wir in jedem Punkt eine eindeutig bestimmte Spannung

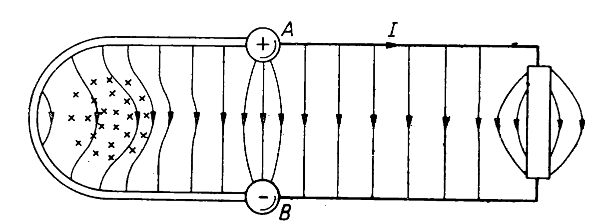


Abb. 194c. Qualitativer Verlauf des Feldes in der Umgebung eines Generators; außerhalb der „Maschine" ist das Feld bereits wirbelfrei, so daß die Spannung mit einem Voltmeter eindeutig bestimmt werden kann

4.3. Einige einfache elektrische Wirbelfelder

Wir sahen, daß durch die Änderung eines magnetischen Feldes ein elektrisches Feld erzeugt wird. Die Integration längs der Leiter liefert die induzierte Spannung.

Bis jetzt wurde hauptsächlich die in dem Leiter induzierte Spannung behandelt. Es soll in einigen einfachen Fällen auch das Feld selbst untersucht werden.

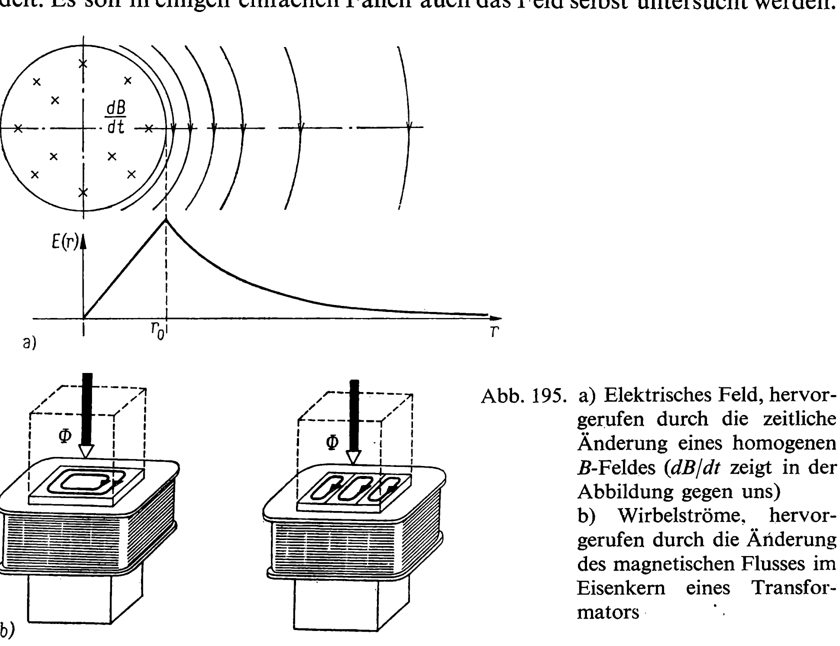


Abb. 195. a) Elektrisches Feld, hervorgerufen durch die zeitliche Änderung eines homogenen B-Feldes (dB/dt zeigt in der Abbildung gegen uns)
b) Wirbelströme, hervorgerufen durch die Änderung des magnetischen Flusses im Eisenkern eines Transformators

1. Das magnetische Feld sei nach Abb. 195a homogen und ändere sich nach der Zeitfunktion $H = H_0 \sin \omega t$. Das Linienintegral der elektrischen Feldstärke in der Entfernung $r < r_0$ vom Mittelpunkt ist

$$2\pi\, rE = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \omega H_0 \cos \omega t \cdot r^2 \pi,$$

$$E = -\mu_0 \frac{r\omega H_0}{2} \cos \omega t.$$

Die Feldstärke wächst demnach mit r bis zur Grenze des magnetischen Feldes ($r = r_0$) linear an. Von hier an ändert sich der umschlossene Kraftfluß nicht mehr. Für $r > r_0$ gilt deshalb

$$2\pi r E = -\mu_0 \omega H_0 \cos \omega t \cdot r_0^2 \pi$$

oder

$$E = -\mu_0 \frac{\omega H_0 r_0^2}{2r} \cos \omega t. \tag{4.3.1}$$

Die Feldstärke nimmt demnach dort hyperbolisch ab.

Dieses elektrische Feld entsteht natürlich auch im Eisen, wenn sich z. B. der magnetische Fluß im Eisenkern eines Transformators ändert. Da das Eisen eine ziemlich hohe Leitfähigkeit hat, entsteht ein zirkulares Strömungsfeld (Abb. 195b), das das ursprüngliche magnetische Feld beeinflußt. Diese Rückwirkung wollen wir vorerst vernachlässigen. Die elektrische Strömung entwickelt aber JOULEsche Wärme. Zur Vermeidung dieser Verluste verwendet man überall dort, wo der Fluß sich zeitlich ändert, anstatt massiver Kerne lamellierte oder aus Metallpulver gepreßte Kerne. Für die Wirbelverluste gilt annähernd

$$W_{\text{Wirbel}} = C_{\text{Wirbel}}\, d^2 f^2 B_{\max}^2. \tag{4.3.2}$$

Die Lamellen sind also möglichst dünn zu halten.

2. In Wirklichkeit sinkt die magnetische Feldstärke selbstverständlich nie sprunghaft auf Null ab. Die Abhängigkeit des magnetischen Feldes vom Radiusvektor wird oft von den Erfordernissen der Praxis vorgeschrieben, wo solche Felder durch die spezielle Ausbildung des Eisenkerns, insbesondere der Polschuhe, verwirklicht werden.

Es soll das magnetische Feld entsprechend der Abb. 196 bis zum Halbmesser $r = r_0$ eine konstante Amplitude haben und dann entlang des Halbmessers sich gemäß

$$\dot{H} = H_0 \frac{r_0^n}{r^n} \tag{4.3.3}$$

ändern. Zeitlich ändere es sich rein sinusförmig. Die elektrischen Kraftlinien

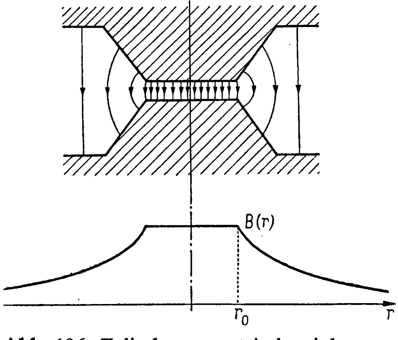


Abb. 196. Zylindersymmetrisches inhomogenes Feld

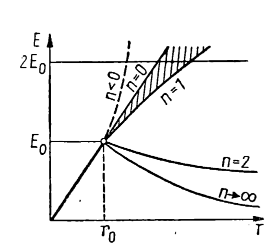


Abb. 197. Induzierte elektrische Feldstärke der Anordnung Abb. 196

werden auch jetzt konzentrische Kreise sein. Das Linienintegral lautet also

$$-2\pi\, Er = \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 \omega \cos \omega t \left[r_0^2 \pi H_0 + H_0 \int_{r_0}^{r} r_0^n\, r^{-n}\, 2\pi\, r\, dr \right].$$

Daraus ergibt sich für den absoluten Wert der Feldstärke für $r > r_0$, $n \neq 2$

$$E = \mu_0 \frac{H_0 \omega r_0^2}{2r} + \mu_0 \frac{H_0 \omega}{r} \frac{r_0^n}{2-n} \left(r^{2-n} - r_0^{2-n}\right); \text{ vgl. Abb. 197.} \qquad (4.3.4)$$

Diese Funktion ist in der Abb. 197 dargestellt.

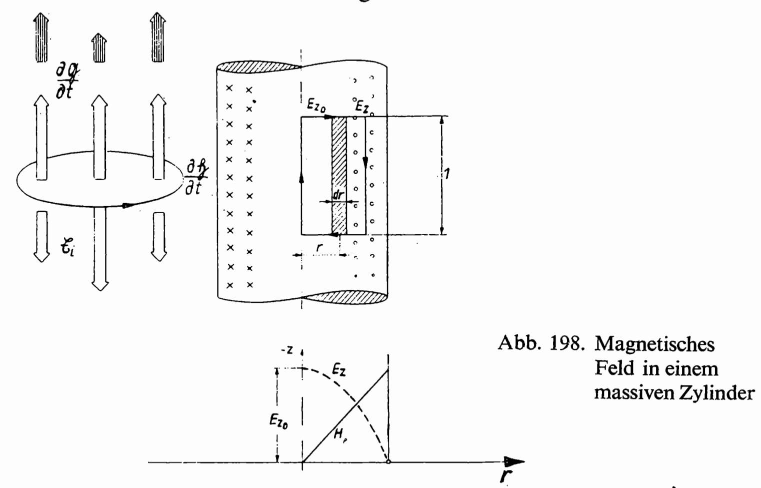


Abb. 198. Magnetisches Feld in einem massiven Zylinder

3. Das magnetische Feld soll sich nun, vom Mittelpunkt ausgehend, linear ändern (Abb. 198). Das Feld sei auch jetzt axialsymmetrisch, die H-Linien sollen jedoch konzentrische Kreise sein, die jetzt also mit der Achse parallel verlaufen:

$$H_\varphi(r, t) = H_{\varphi 0} \frac{r}{r_0} \sin \omega t \quad \text{für} \quad r \leqq r_0, \quad \text{sonst} \quad H = 0. \qquad (4.3.5)$$

Ein derartiges magnetisches Feld entsteht, wie bereits erwähnt, durch eine homogene Stromdichte in Richtung der Achse mit einer flächenartigen Rückleitung bei $r = r_0$. Das elektrische Feld, welches durch die Wirkung der magnetischen Feldänderung entsteht, zeigt jetzt in Richtung der Achse. Wenn man also die Feldstärke entlang der in Abb. 198 bezeichneten Strecke integriert, erhält man

$$E_{z0} - E_z = -\mu_0\, \omega \cos \omega t\, \frac{H_{\varphi 0}}{r_0} \int_0^r r\, dr = -\mu_0 \omega \cos \omega t\, H_{\varphi 0} \frac{r^2}{2r_0}.$$

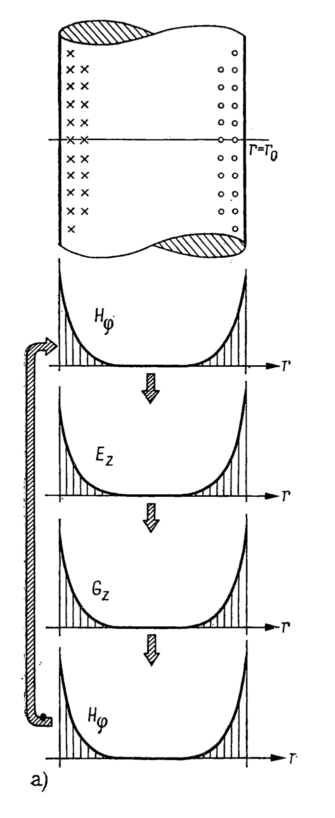
Es wird also

$$E_z = \mu_0 \left(\frac{\omega H_{\varphi 0}}{2r_0} r^2 - \frac{\omega H_{\varphi 0}}{2r_0} r_0^2 \right) \cos \omega t. \qquad (4.3.6)$$

Die in der Richtung der Achse liegende induzierte Feldstärke nimmt daher nach außen hin monoton ab. Am größten ist sie in der Achse, an der Stelle $r = r_0$ ist sie gleich Null.

Unter Berücksichtigung der Vorzeichenverhältnisse ist zu sagen, daß das entstandene Feld E_i dem Feld dH/dt entsprechend einer Linksschraube zugeordnet ist. So arbeitet also das wegen der Induktion auftretende Feld gegen die Stromänderung, die dieses Feld erzeugt hat, und zwar in stärkerem Maße an der Achse, in schwächerem Maße nach außen hin. Die so entstandene elektrische Feldstärke strebt offensichtlich danach, die ursprünglich homogene Stromdichte zu verändern. Das ursprüngliche elektromagnetische Feld wäre daher nur mit Hilfe besonderer Maßnahmen aufrechtzuerhalten.

4. Es soll jetzt eine auf den ersten Blick merkwürdig erscheinende magnetische Feldverteilung angenommen werden: Das Feld soll zylindersymmetrisch sein, und die magnetische Feldstärke soll von einem Halbmesser r_0 an exponentiell bis zum Wert ≈ 0 im Mittelpunkt abfallen (Abb. 199). Das



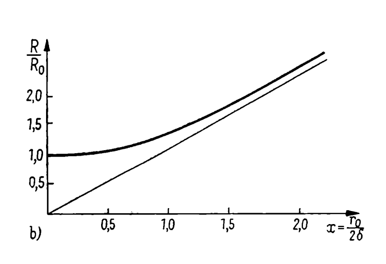


Abb. 199. Skineffekt (zu Beispiel 4 und 5)

magnetische Feld soll auch jetzt nur tangentielle Komponenten besitzen, die H_φ-Linien sollen also konzentrische Kreise sein. H_φ als Funktion von r und t ist durch die Funktion

$$H_\varphi = H_0 e^{-k(r_0 - r)} \sin \omega t \tag{4.3.7}$$

gegeben. $H_\varphi(0) \ll H_0$ für $r = 0$ ist gewährleistet, wenn

$$kr_0 \gg 1$$

ist. E_z kann ähnlich wie im letzten Beispiel berechnet werden:

$$E_z = -\mu_0 \int_0^r \omega \, dr \, H_0 e^{-k(r_0 - r)} \cos \omega t = \mu_0 \left[-\frac{\omega}{k} H_0 e^{-k(r_0 - r)} \right]_0^r \cos \omega t .$$

Wird die Bedingung $kr_0 \gg 1$ berücksichtigt, erhält man

$$E_z = -\mu_0 \frac{\omega}{k} H_0 e^{-k(r_0 - r)} \cos \omega t . \tag{4.3.8}$$

Die Komponente E_z hat denselben räumlichen Verlauf wie H_φ. Zeitlich ist sie jedoch verschoben.

5. Das eben behandelte Beispiel hat weitgehende praktische Bedeutung: Man stelle sich vor, daß durch (4.3.7) das magnetische Wechselfeld H in einem Leiter mit dem Halbmesser r_0 gegeben sei. Das induzierte elektrische Feld E bringt dann eine bestimmte Stromdichteverteilung G zustande, zu welcher wiederum ein bestimmtes H-Feld gehört. Wenn es sich ergibt, daß das so entstandene H-Feld mit dem ursprünglichen Feld H identisch ist, so bilden die darin vorkommenden Verteilungen E, G, H ein kompatibles elektromagnetisches Feld, welches ohne jede besondere Maßnahme bestehen kann. Wir fragen, ob dies in diesem Fall möglich ist. Der Wert der durch E_z erzeugten Funktion $G_z(r, t)$ ist bei Berücksichtigung der Beziehung $G = \gamma E$

$$G_z(r, t) = -\frac{\gamma \omega \mu_0}{k} H_0 e^{-k(r_0 - r)} \cos \omega t .$$

Daraus erfolgt durch Anwendung des Erregungsgesetzes

$$2\pi \, r H_\varphi = -\int_0^r 2\pi \, x \frac{\gamma \omega \mu_0}{k} H_0 e^{-k(r_0 - x)} \, dx \cos \omega t$$

und damit bei Berücksichtigung von $kr_0 \gg 1$

$$H = -\mu_0 \frac{1}{k^2} \gamma \omega H_0 e^{-k(r_0 - r)} \cos \omega t + \mu_0 \frac{1}{k^3} \frac{\gamma \omega}{r} H_0 e^{-k(r_0 - r)} \cos \omega t .$$

Wenn wir annehmen, daß überall dort, wo wegen des exponentiellen Verlaufes noch von Null abweichende Werte bestehen, $kr \gg 1$ ist und man demnach das zweite Glied der Differenz vernachlässigen kann, so verbleibt

$$H_\varphi = -\mu_0 \frac{1}{k^2} \gamma\omega H_0 e^{-k(r_0-r)} \cos \omega t .$$

Damit das ursprüngliche magnetische Feld mit der Amplitude H_0 wiederhergestellt werden kann, muß die Bedingung

$$\mu_0 \frac{\gamma\omega}{k^2} = 1 \quad \text{oder} \quad k = \sqrt{\gamma\omega\mu_0}$$

erfüllt werden. Somit ist der bisher unbestimmte Wert von k durch bekannte physikalische Größen ausgedrückt worden.

Ein Schönheitsfehler der bisherigen Ausführungen ist, daß sich das ursprüngliche Feld zeitlich nach einer Sinusfunktion, das resultierende Feld hingegen nach einer Kosinusfunktion ändert. Das ursprüngliche Feld wurde also der Größe nach richtig, der Phase nach aber verschoben wiederhergestellt.

Später wird man sehen, daß die Phase des magnetischen (wie auch des elektrischen) Feldes von der Koordinate r in folgender Weise abhängt:

$$H_\varphi = H_0 e^{-k(r_0-r)} \sin [\omega t - k(r_0 - r)] .$$

Wenn man die früheren Operationen mit dieser Funktion durchführt, d. h., wenn man den Weg

$$H_\varphi \to E_z \to G_z \to H_\varphi$$

zu Ende verfolgt, erhält man unter Beibehaltung der Voraussetzung $k = \sqrt{\gamma\omega\mu_0}$ den ursprünglichen Ausdruck der Größe und Phase nach richtig zurück.

Bei schnell veränderlichen Strömen verteilt sich also die Stromdichte nicht gleichmäßig über den Querschnitt des Leiters, sondern nimmt nach innen zu stark ab. Man kann annehmen, daß der Strom nur in einer sehr dünnen Randschicht von Null verschieden ist.

Die sogenannte Eindringtiefe δ des Stromes ist mit k durch die Gleichung

$$\delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{1}{\gamma\mu_0\omega}}$$

verknüpft.

Die Erscheinung selbst nennt man Skin- oder Hauteffekt. Der Widerstand des Leiters wird dabei erhöht, weil der Strom jetzt nicht den Querschnitt $r_0^2\pi$ zur Verfügung hat, sondern nur einen Ring mit dem Flächeninhalt $2r_0\delta\pi$. Es

wird also der Hochfrequenzwiderstand

$$R \approx R_0 \frac{r_0^2 \pi}{2 r_0 \pi \delta} = R_0 \frac{r_0}{2\delta},$$

wobei R_0 der Gleichstromwiderstand ist. Für nicht allzu hohe Frequenzen, bei denen die Ungleichheit $r_0/2\delta \gg 1$ nicht mehr gilt, sind die Rechnungen ziemlich schwierig. Eine Orientierung gibt die Abb. 199b.

4.4. Die Induktion in bewegten Leitern

Bei den bisher besprochenen Stromkreisen behielten alle Teile des Stromkreises ihre relative Lage zueinander bei, nur die Größe der magnetischen Feldstärke änderte sich als Funktion der Zeit. Die Erfahrung zeigt, daß in einem konstanten magnetischen Feld durch die Bewegung eines Teiles eines geschlossenen Stromkreises in diesem eine Spannung auftritt, welche der Geschwindigkeit der Bewegung und der Größe der Induktion proportional ist. Zur Untersuchung dieser Erscheinung dient die in Abb. 200 skizzierte ein-

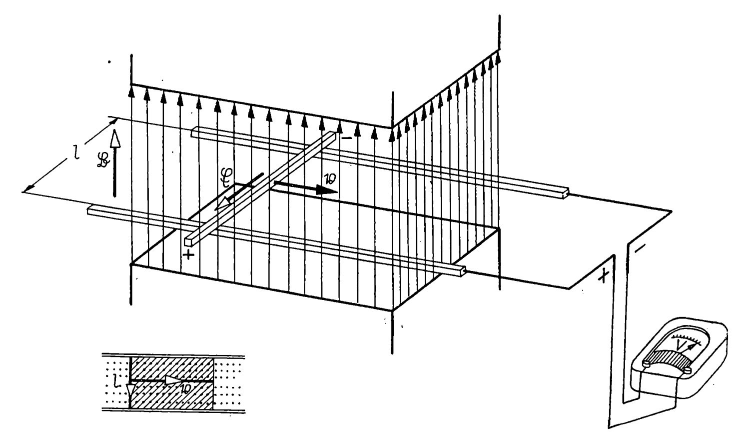


Abb. 200. Induktion in bewegten Leitern

fache Anordnung. In ein homogenes magnetisches Feld werden zwei parallele Leiter gebracht, deren Enden mit einem Spannungsmesser verbunden sind, und eine zu beiden Leitern senkrechte Leitung wird, diese verbindend, auf ihnen bewegt. Wenn das Leitungsstück der Länge l mit der Geschwindigkeit v gleichförmig bewegt wird, beobachtet man eine Spannung

$$U_i = vlB. \tag{4.4.1}$$

Die induzierte Spannung ist also gleich der Zahl der Kraftlinien, die in der Zeiteinheit geschnitten werden. Während der Zeiteinheit überstreicht das Leitungsstück nämlich eine Fläche $A = vl$, und da die Zahl der Induktionslinien je Flächeneinheit gerade B ist, so ist der während der Zeiteinheit geschnittene Kraftfluß

$$AB = vlB. \tag{4.4.2}$$

Diese Beziehung ist nur dann so einfach, wenn die magnetischen Induktionslinien senkrecht zu dem Leitungsstück verlaufen und die Bewegungsrichtung des Leiters sowohl senkrecht zu sich selbst als auch zu den magnetischen Induktionslinien verläuft. Die Gleichung (4.4.1) kann auch im Sinne des Induktionsgesetzes für ruhende Leiter aufgefaßt werden. Wir fanden nämlich ganz allgemein: Wenn sich in einem geschlossenen Stromkreis die Zahl der umschlossenen magnetischen Kraftlinien ändert, so wird dadurch eine Spannung induziert, welche gleich der Änderung der Zahl der umschlossenen Kraftlinien pro Zeiteinheit ist, wobei es gleichgültig ist, wie die Änderung der Kraftlinienzahl erreicht wird. Im Stromkreis entsteht also auch im vorliegenden Fall eine Spannung, weil sich der umschlossene Kraftfluß bei der Ortsänderung des Stromkreises ändert. Die ruhende Induktion weicht jedoch von der Bewegungsinduktion grundsätzlich ab. Im ersten Fall wird eine Kraftwirkung auf das im Leiter befindliche Elektron wahrgenommen, weil durch die zeitliche Änderung der Induktion ein elektrisches Feld entsteht und dieses im Sinne der Beziehung

$$\mathfrak{F} = Q\mathfrak{E}$$

auf das Elektron eine Kraftwirkung ausübt. Diese Feldstärke entsteht in beliebigen Punkten des Raumes auch dann, wenn sich dort überhaupt kein Leiter befindet. Bei der Bewegungsinduktion spielt die Anwesenheit des Leiters bzw. die Anwesenheit von verschieblichen Ladungsträgern eine wesentliche Rolle. Durch die Verschiebung des Leiters im magnetischen Feld verschieben wir gleichfalls auch die in der Leitung befindlichen Elektronen. Sich bewegende Ladungen bedeuten aber einen Strom, und auf den Strom übt das magnetische Feld eine Kraftwirkung aus. In diesem Sinne übt das magnetische Feld eine Wirkung auf das Elektron gerade wegen dessen Bewegung aus.

Die relativistische Behandlung der Elektrodynamik zeigt jedoch, daß dieser prinzipielle Unterschied zwischen der ruhenden und der Bewegungsinduktion nur scheinbar besteht und daß er vom Koordinatensystem abhängt. Bei unserem gegenwärtigen Stand der Behandlung ist es jedoch zweckmäßig, diesen Unterschied zu unterstreichen und zur Erklärung der Erscheinungen zu verwenden.

Die Größe der Kraft, die auf ein Elektron im Innern des Leiters wirkt, kann auf Grund der bisherigen Erörterungen schon bestimmt werden:

$$F = QE = Q\frac{U}{l} = QvB$$

(Abb. 201). Diese Beziehung kann einfach erklärt werden. Bei der Definition der magnetischen Induktion wurde gesagt, daß ein Moment, welches auf einen

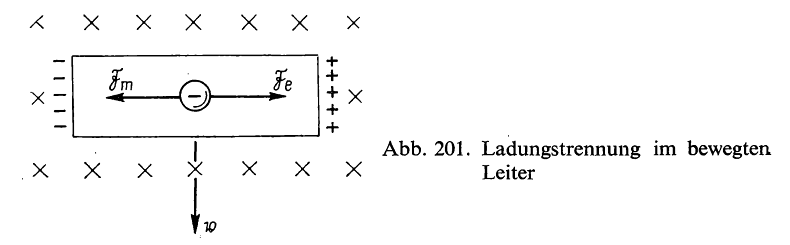


Abb. 201. Ladungstrennung im bewegten Leiter

kleinen, in ein magnetisches Feld gebrachten Stromkreis wirkt, dadurch entsteht, daß auf den vom Strom durchflossenen Teil l des Leiters eine Kraft

$$F = IlB$$

wirkt. Wenn man diese Gleichung mit der vorangehenden vergleicht, sieht man, daß eine bewegte Ladung einen elementaren Strom der Größe

$$Il = Qv$$

darstellt. Die bewegte Ladung ist also auch im Hinblick auf ein erzeugtes magnetisches Feld gleich dem durch diese Gleichung bestimmten elementaren Strom.

Beispiele und Ergänzungen

1. Wenn die Vektoren der Induktion und der Geschwindigkeit und die Richtung des Leiters nicht so einfach im Raum liegen wie beim vorhin besprochenen Versuch, so erhält man die induzierte Spannung und die Feldstärke durch die Beziehungen

$$U_i = [\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}]\, d\mathfrak{l}$$

und

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{B}.$$

Man kann der induzierten Spannung auch in diesem Fall die bekannte anschauliche Deutung geben. Die induzierte Spannung ist gleich der Zahl der in der Zeiteinheit geschnittenen Kraftlinien.

Wenn sich ein geschlossener Leiter in einem Feld beliebiger Induktion $\mathfrak{B}$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt, so muß man die in den einzelnen Elementen $d\mathfrak{l}$ des Leiters induzierten Spannungen summieren:

$$U_i = \int_L \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = \int_L [\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}]\, d\mathfrak{l}.$$

2. Falls sich der magnetische Kraftfluß auch zeitlich ändert, so erhält man auch dadurch eine Spannung im Leiter. Die gesamte, aus der Bewegung und aus der zeitlichen Änderung resultierende Spannung ist

$$U_i = \oint_L \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = -\int_A \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\, d\mathfrak{A} + \oint_L [\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}]\, d\mathfrak{l}.$$

Das Linienintegral kann nach dem STOKESschen Satz umgewandelt werden:

$$\oint_L [\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}]\, d\mathfrak{l} = \int_A \operatorname{rot} [\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}]\, d\mathfrak{A}.$$

Daraus erhält man

$$U_i = \oint_L \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = -\int_A \left[\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} - \operatorname{rot} [\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}]\right] d\mathfrak{A}$$

oder nach nochmaliger Anwendung des STOKESschen Satzes auf die linke Seite der Gleichung und Vergleich der Integranden

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} [\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}].$$

3. Die Bewegungsinduktion hat eine große praktische Bedeutung. In allen elektrischen Umlaufmaschinen entsteht die Spannung entweder ausschließlich durch Bewegungsinduktion oder in selteneren Fällen durch das Zusammenwirken von Bewegungs- und ruhender Induktion. In Abb. 202 sehen wir einen einzelnen Leiter eines Generators, welcher sich unter den Polen des Elektromagneten bewegt. In einer einzigen Leitung kann je nach der Größe der Maschine eine Spannung von $1 \cdots 10$ V entstehen.

4. Für die Richtung der induzierten Spannung wurden bei der Bewegungs- und der ruhenden Induktion verschiedene Vorzeichenregeln erörtert. Diese Regeln können auch aus dem LENZschen Gesetz abgeleitet werden, wonach die induzierte Spannung immer einen derart gerichteten Strom im Leiter hervorruft, der der Ursache seiner Entstehung entgegenwirkt bzw. seine Wirkung

zu hemmen trachtet. Wenn der Kraftfluß bei der ruhenden Induktion abnimmt, so trachtet der induzierte Strom, diese Abnahme zu hemmen, wenn er steigt, so trachtet er das Zunehmen zu verlangsamen. Bei der Bewegungsinduktion wirkt auf den Strom im magnetischen Feld eine Kraft, welche die Bewegung des Leiters bremst.

5. Eine Metallscheibe soll sich in einem homogenen magnetischen Feld senkrecht zu den Kraftlinien bewegen. Welche Spannung kann zwischen der Achse der Scheibe und deren Rand gemessen werden? Die Frage überrascht

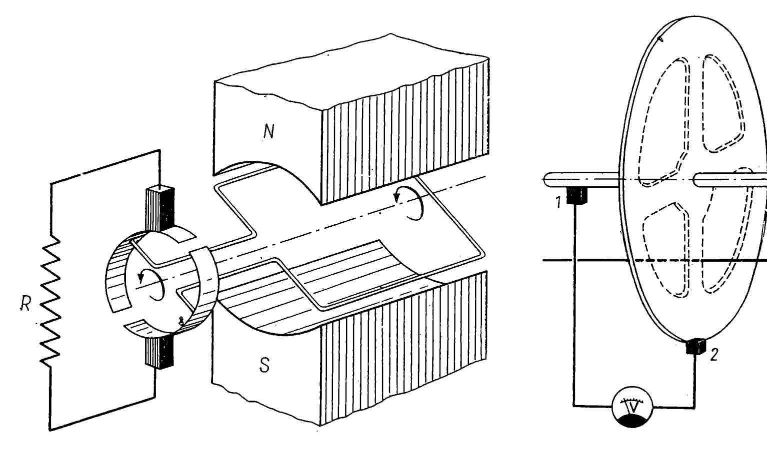


Abb. 202. Anordnung der Leiter in einem Gleichstromgenerator

Abb. 203. Induktion in einer rotierenden Scheibe

im ersten Moment, denn es besteht offensichtlich keine ruhende Induktion, und wir erkennen keinen für die Bewegungsinduktion notwendigen „geschlossenen Leiter". Wenn man sich die Scheibe aber nicht massiv, sondern mit Speichen versehen vorstellt (Abb. 203), so sieht man sofort einen geschlossenen Kreis, bestehend aus Klemme 1 – Achse – Speiche – Klemme 2 – Spannungsmesser, dessen Speichenteil sich bewegt. Dem Wesen nach ändert sich nichts, wenn die Speichen beliebig eng aneinander stehen und schließlich den Rotor flächenhaft ausfüllen.

Diese Überlegung ist aber überflüssig, wenn man sich vorstellt, daß im magnetischen Feld B auf ein Elektron, welches sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, eine der Feldstärke

$$E = vB$$

entsprechende Kraft wirkt. Wenn die Winkelgeschwindigkeit ω der Scheibe konstant und der Halbmesser gleich r_0 ist, so ist in der Entfernung r von der Achse die Feldstärke

$$E = vB = r\omega B.$$

Die Spannung ist deren Linienintegral:

$$U = \int_0^{r_0} E\,dr = \omega B \int_0^{r_0} r\,dr = \omega B \frac{r_0^2}{2}.$$

Wenn z. B.

$$B = 1\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}, \quad r_0 = 0{,}5\ \mathrm{m}, \quad n = 3000\ \mathrm{min}^{-1}$$

sind (diese Werte liegen so ziemlich an der Grenze des Möglichen), dann wird die induzierte Spannung

$$U = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^3}{60} \cdot 1\,\frac{0{,}5^2}{2} = 37{,}7\ \mathrm{V}.$$

Dieser kleine Wert zeigt, warum eine Unipolarmaschine trotz ihrer einfachen Konstruktion höchst selten verwendet wird.

6. Wenn sich massive Leiter im magnetischen Feld bewegen, entstehen in ihnen stets Wirbelströme, welche meistens Verluste bedeuten. Deshalb werden auch die Rotoren von Gleichstrommaschinen lamelliert (Abb. 204).

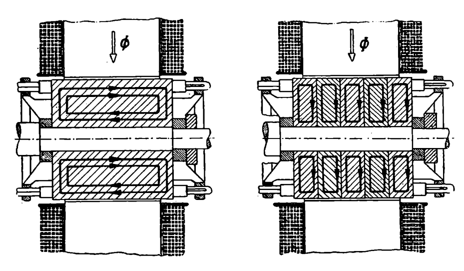


Abb. 204. Wirbelströme in massiven bewegten Leitern (nach RASSOWSKI)

7. Auf dem Umfang eines Kreises vom Halbmesser r bewege sich ein der Drehachse paralleler Leiter der Länge l mit der Winkelgeschwindigkeit ω in einem zur Achse senkrechten homogenen Feld (Abb. 205). Wie ist der zeitliche Verlauf der Spannung?

Die induzierte Spannung ist

$$U = \mathfrak{l}[\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}] = lvB \sin \varphi = lvB \sin \omega t = U_0 \sin \omega t,$$

wenn sich im Zeitpunkt $t = 0$ der Leiter an einem durch die Koordinate $\varphi = 0$ bestimmten Ort befindet.

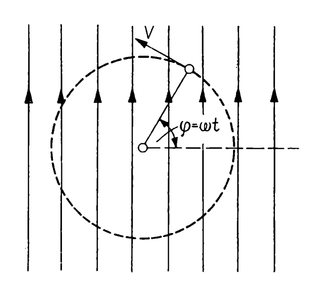


Abb. 205. Rotierender Leiter im homogenen Feld

8. Dieselbe Aufgabe ist zu lösen, wobei sich die Induktion zeitlich gemäß

$$B = B_0 \sin \omega_0 t$$

ändert.

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung der 6. Aufgabe ein, so entsteht

$$U = lvB_0 \sin \omega_0 t \sin (\omega t + \varphi) = U_0 \sin \omega_0 t \sin (\omega t + \varphi).$$

Hier ist es notwendig, den Phasenwinkel φ hinzuzusetzen, da man sonst vorausgesetzt hätte, daß bei maximaler Induktion auch die Geschwindigkeit am größten ist, mit der die Kraftlinien geschnitten werden.

Es lohnt sich, einige Spezialfälle zu untersuchen.

a) Für $\varphi = 0, \quad \omega = \omega_0$ wird

$$U = U_0 \sin \omega_0 t \sin \omega t = U_0 \sin^2 \omega t = \frac{U_0}{2}(1 - \cos 2\omega t)$$

(Kurve a in Abb. 206).

b) Für $\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \omega_0$ wird

$$U = U_0 \sin \omega t \cos \omega t = \frac{U_0}{2} \sin 2\omega t$$

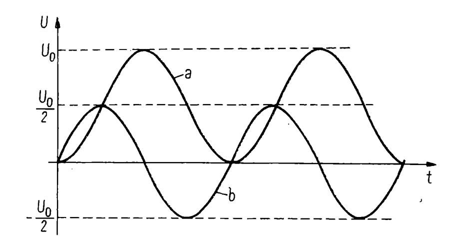
(Kurve b in Abb. 206).

c) Wenn $\omega \gg \omega_0$ ist, ist $\sin \omega_0 t$ eine gegenüber $\sin (\omega t + \varphi)$ mit der Zeit nur langsam veränderliche Funktion; der Grundschwingung mit der Kreisfrequenz ω ist die mit ω_0 modulierte Amplitude $U_0 \sin \omega_0 t$ überlagert (Kurve c in Abb. 206).

d) Es sei $\omega = \omega_0 - \omega_1$ mit $\omega_1 \ll \omega_0$. Der Einfachheit halber wählen wir, ohne daß die Allgemeingültigkeit aufgegeben wird, $\varphi = 0$.

Durch Anwendung der Beziehung

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)$$



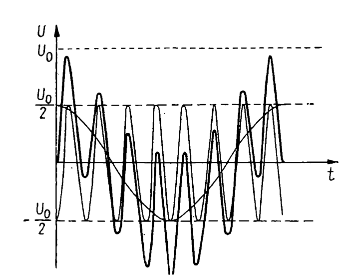


Abb. 207. Spannungsverlauf bei stark unterschiedlichen Frequenzen

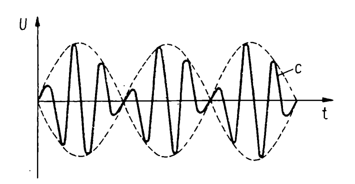


Abb. 206. Spannungsverlauf zu Beispiel 8

und durch Einsetzen von $\alpha = \omega_0 t$, $\beta = (\omega_0 - \omega_1)t$ läßt sich der Ausdruck für die induzierte Spannung wie folgt umformen:

$$U = \frac{U_0}{2} [\cos \omega_1 t - \cos (2\omega_0 - \omega_1)t] \approx \frac{U_0}{2} [\cos \omega_1 t - \cos 2\omega_0 t].$$

Im Leiter werden demnach zwei Spannungen von wesentlich verschiedener Frequenz induziert (Abb. 207).

Wenn der Leiter geschlossen ist, fließt darin ein Strom. Der zeitliche Verlauf der Ströme weicht von dem der Spannung wesentlich ab. Wegen des induktiven Widerstandes des Leiters wird der Strom mit der größeren Frequenz eine wesentlich kleinere Amplitude besitzen. Der bisher behandelte Fall spielt in der Theorie der Einphasen-Induktionsmotoren eine große Rolle.

4.5. Messung der magnetischen Induktion in der Praxis

Der Vektor der magnetischen Induktion wurde auf Grund der Kraftwirkung definiert. Der Definition gemäß kann man prinzipiell in einem beliebigen Punkt des Raumes die Stärke der magnetischen Induktion messen. In der Praxis steht aber auch eine einfachere Methode zur Verfügung, die deshalb

sympathischer sein dürfte, weil hier ausschließlich elektrische Meßinstrumente verwendet werden. Diese Methode beruht auf dem Induktionsgesetz.

Eine kleine Spule soll nach Abb. 208 in ein Magnetfeld gebracht werden, so daß ihre Fläche senkrecht auf den Induktionslinien steht. Wenn wir nun

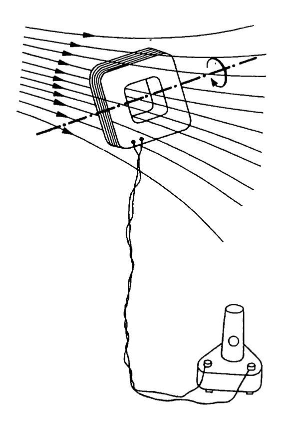


Abb. 208. Messung der Induktion in der Praxis

das magnetische Feld abschalten, ändert sich der Wert der Induktion und damit auch der von der Spule umschlossene Kraftfluß, d. h., in der Spule wird eine Spannung induziert. Die Größe der Spannung ist nach dem Induktionsgesetz

$$U = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(AB)}{dt}.$$

Hieraus folgt für den Kraftfluß bzw. die Induktion:

$$\Phi = \int_0^t U\,dt, \quad B = \frac{1}{A}\int_0^t U\,dt.$$

Es ist demnach möglich, die Induktion zu bestimmen, indem man den Spannungsstoß mißt und den gemessenen Wert durch den Querschnitt der Spule dividiert.

Statt das magnetische Feld abzuschalten, genügt es, den Spulenrahmen schnell in die Fläche der Induktionslinien zu drehen. Die Zahl der Kraftlinien, die durch die Fläche hindurchgehen, sinkt auch in diesem Fall auf Null.

Wenn die magnetische Induktion und dadurch auch die magnetische Feldstärke in einem beliebigen Punkt des Raumes gemessen werden kann, dann können die Grundgesetze des magnetischen Feldes, und zwar das Erregungsgesetz und die Quellenfreiheit des Induktionsvektors, leicht bewiesen werden.

Bringen wir in ein beliebiges magnetisches Feld eine flache Versuchsspule mit der Normalenrichtung $\mathfrak{n}$, dann ist der mit einem Galvanometer gemessene

Wert des Spannungsstoßes, der beim Verschwinden des magnetischen Feldes auftritt,

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB_n = \int_0^\tau U\,dt$$

und die Normalkomponente der magnetischen Feldstärke

$$H_n = \frac{1}{\mu_0} B_n = \frac{1}{\mu_0 A} \int_0^\tau U\,dt.$$

Es sollen nun im magnetischen Feld entlang einer beliebig verlaufenden Linie mehrere derartige kleine, flache Spulen gesetzt werden, deren Normalen überall in die Richtung der Tangente der Kurve zeigen (Abb. 209). Die Spulen sollen untereinander alle den gleichen Abstand dl haben. Jede einzelne Spule mißt

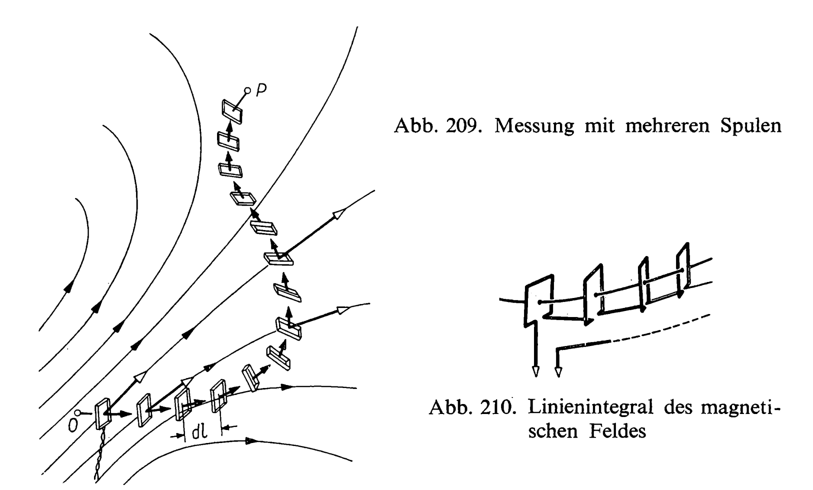


Abb. 209. Messung mit mehreren Spulen

Abb. 210. Linienintegral des magnetischen Feldes

die an ihrem Ort auftretende, in Richtung der Normalen der Spule zeigende Komponente des Feldes. Da aber die Normale mit der Tangente der obengenannten Kurve zusammenfällt, bekommt man die in Richtung der Kurve zeigende Komponente von H_n. Wenn man die von jeder einzelnen Spule gemessenen Werte H_n mit dem bekannten Abstand dl multipliziert, ergeben sich Elemente des Linienintegrals des magnetischen Feldes. Summiert man schließlich sämtliche Elemente $H_n dl$, so erhält man das volle Linienintegral des magnetischen Feldes zwischen den Punkten O und P. Statt diese Messungen mit jeder Spule einzeln durchzuführen und die Ergebnisse dann zu summieren, kann man die Spulen miteinander verbinden (Abb. 210). Nach dem Ver-

schwinden des magnetischen Feldes erhält man unmittelbar

$$\sum_{0}^{L} H_n\, dl = \int_{O}^{P} \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l},$$

d. h. einen Wert, der proportional dem ganzen Linienintegral ist.

Die Abstände zwischen den einzelnen Spulen müssen auch bei einer beliebigen Änderung des Integrationsweges konstant bleiben. Die Spulen werden deshalb alle auf ein biegsames Band (z. B. aus Leder) gewickelt, dessen Länge sich nicht verändern kann. Damit die Gesamtlänge des Bandes voll ausgenützt werden kann, werden die Windungen kontinuierlich auf das Band gewickelt, wobei darauf zu achten ist, daß sich auf der Längeneinheit überall gleich viele Windungen befinden.

Dieses Meßinstrument nennt man magnetischer Spannungsmesser oder nach seinem Erfinder ROGOWSKI-Spule. Bei der Anwendung dieser Spule muß man besonders darauf achten, daß die Zuführungen zur Spule im magnetischen Feld keinen separaten Kraftfluß umschließen, dessen Änderung das Ergebnis verfälschen könnte. So besteht bei der in Abb. 211a skizzierten Anordnung

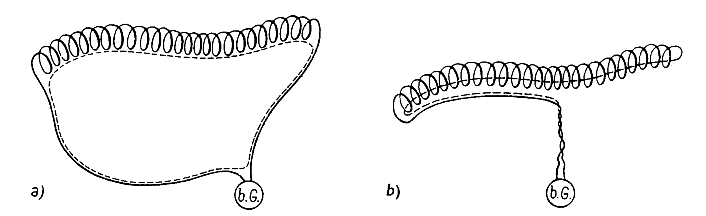


Abb. 211. Messung mit der ROGOWSKI-Spule

außerhalb der ROGOWSKI-Spule noch eine große Schleife, deren umschlossener magnetischer Fluß mitgemessen wird, obwohl er bei der Messung des Linienintegrals überhaupt nicht vorkommen dürfte. Besser ist eine Anordnung nach Abb. 211b. Am zweckmäßigsten ist aber eine gleichsinnig in zwei Schichten hin und zurück gewickelte und in der Mitte herausgeleitete Spule. Wird eine solche Spule zu einem Toroid gekrümmt, so existiert keine störende Schleife mehr. Man hat dann genaugenommen zwei Schleifen, bei welchen sich die induzierten Spannungen gegenseitig aufheben.

Mit Hilfe des magnetischen Spannungsmessers kann auch das Erregungsgesetz geprüft werden. Mit den in den Abb. 212a, b, c gezeigten Anordnungen kann man nachweisen, daß das Linienintegral des magnetischen Feldes nicht vom Verlauf der Linie (Spule) abhängt und daß das Linienintegral den Wert Null hat, wenn die Spule den Strom nicht umschließt.

Zum Nachweis der Quellenfreiheit der magnetischen Induktion genügt es zu zeigen, daß durch eine von einer geschlossenen Linie berandeten Fläche immer der gleiche Kraftfluß fließt, da dann in einem Volumen, das von zwei beliebigen, über dieselbe Linie gespannten Flächen begrenzt ist, keine Kraftlinien entspringen oder enden können und demnach innerhalb dieses Volumens die Divergenz des Induktionsvektors Null sein muß.

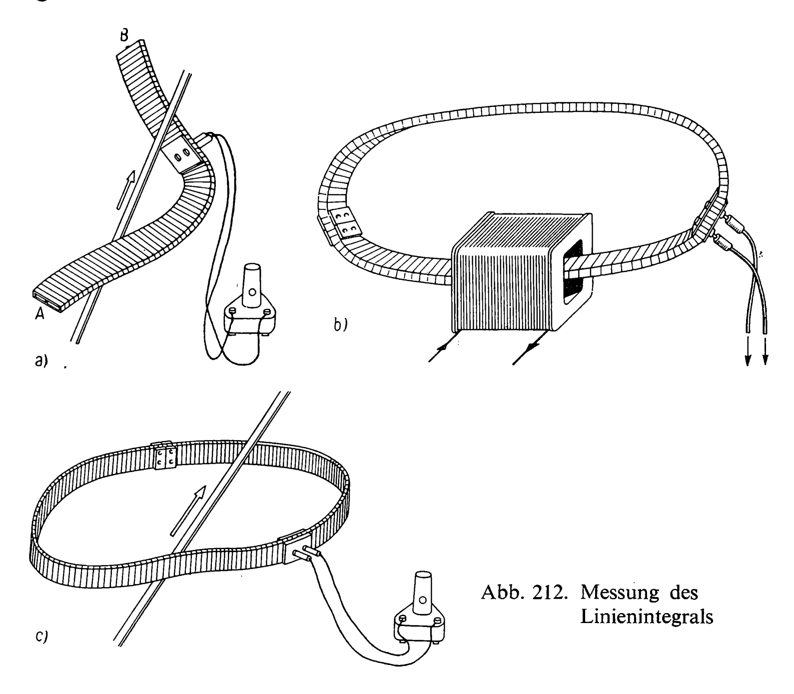


Abb. 212. Messung des Linienintegrals

Der experimentelle Nachweis der Quellenfreiheit des Induktionsvektors kann ähnlich geführt werden wie der des Erregungsgesetzes. Dabei sind die Meßspulen jedoch nicht entlang einer Kurve anzuordnen, vertikal zur Tangente der Kurve, sondern auf einer über eine geschlossene Kurve gespannten Fläche derart, daß die Normale der Fläche und die Normale der kleinen Spulen an jeder Stelle zusammenfallen. Wenn nun diese kleinen Spulen in Reihe geschaltet werden und das magnetische Feld ein- bzw. ausgeschaltet wird, so ist der resultierende Spannungsstoß dem Flächenintegral proportional. Die Messungen zeigen, daß bei gleicher Begrenzungskurve auch der Wert des Flächenintegrals gleich bleibt.

Zeitliche Änderung des elektrischen Feldes — Magnetisches Wirbelfeld

4.6. Der Begriff des Verschiebungsstromes

Das magnetische Feld eines geschlossenen Stromkreises haben wir entweder mit Hilfe des BIOT-SAVARTschen Gesetzes oder mit Hilfe des Erregungsgesetzes bzw. des Zusammenhanges rot $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ beschrieben und berechnet. Der Nachdruck soll auf das Wort „geschlossen" gelegt werden. Beim BIOT-SAVARTschen Gesetz muß man die Summation der einzelnen Stromelemente über den ganzen geschlossenen Stromkreis durchführen, bei der Anwendung des Erregungsgesetzes muß man entlang der Integrationslinie die umschlungenen Ströme in Betracht ziehen.

Die beschränkte Gültigkeit des BIOT-SAVARTschen Gesetzes und des Erregungsgesetzes zeigt sich anschaulich, wenn man das magnetische Feld eines offenen Stromkreises untersucht, wie er z. B. in Abb. 213 gezeichnet ist. Ein Strom kann natürlich auch in diesem Fall fließen, da der Kondensator auf-

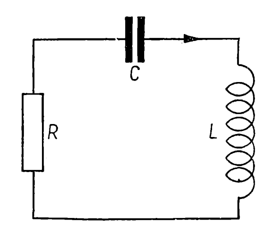


Abb. 213. Offener Stromkreis

geladen und entladen wird. Die Stromdichtelinien entspringen von bzw. enden auf den Ladungen, die sich auf den Kondensatorplatten befinden. Wenn nun in einem beliebigen Punkt der Umgebung eines solchen Stromkreises die Stärke des magnetischen Feldes berechnet werden soll, so enthalten die bisher bekannten Gesetze keine eindeutige Anweisung zur Durchführung dieser Rechnung. Bei der Anwendung des BIOT-SAVARTschen Gesetzes ergibt sich die Frage, ob man die Strecke $d\mathfrak{l}$ zwischen den zwei Punkten des Kondensators in Betracht ziehen soll oder nicht. Im ersten Moment erscheint es richtig, dieses Stück außer acht zu lassen, weil zwischen den Platten des Kondensators kein Strom fließt, da sich dort keine Ladungsträger bewegen. Wenn man hingegen das Erregungsgesetz in Integralform anwendet und dabei über eine beliebige, die Leitung umfassende Linie integriert, so erwartet man ein eindeutiges Ergebnis. Auf der rechten Seite des Erregungsgesetzes ergibt jedoch das Flächenintegral der Stromdichte verschiedene Werte, je nachdem, ob die Integrationsfläche den Leiter schneidet oder zwischen den Platten des Kondensators verläuft (Abb. 214).

Der Widerspruch ist bei der Differentialform des Erregungsgesetzes noch augenfälliger. Bildet man nämlich die Divergenz der beiden Seiten der Gleichung rot $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, so erhält man

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{H} \equiv 0 = \operatorname{div} \mathfrak{G}.$$

Man kann also aus dem Erregungsgesetz die Feldstärke nur dann berechnen, wenn die Divergenz der Stromstärke überall Null ist, d. h., wenn der Stromkreis geschlossen ist.

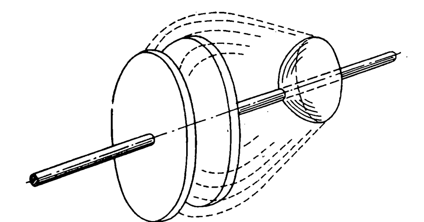


Abb. 214. Anwendung des Erregungsgesetzes auf einen offenen Stromkreis

Offensichtlich haben also das BIOT-SAVARTsche Gesetz und das Erregungsgesetz bei offenen Stromkreisen keine Gültigkeit. Die letzte Gleichung weist aber darauf hin, in welcher Richtung die Ergänzung zu suchen ist. Man muß den offenen Stromkreis durch Zugabe irgendeiner Stromdichte zu einem geschlossenen Stromkreis machen, so daß diese Stromdichte und die Stromdichte des Leiters zusammen quellenfrei werden. Dies kann, wenigstens formal, folgendermaßen erreicht werden: Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Kondensatorplatten die Größe des Leiterquerschnittes besitzen. Da die Stromdichte gleich der Ladung ist, die in der Zeiteinheit durch den Einheitsquerschnitt fließt, muß sich die Ladungsdichte auf den Kondensatorplatten entsprechend dem Wert der Stromdichte ändern:

$$G = \frac{d\sigma}{dt}. \tag{4.6.1}$$

Zwischen dem Vektor der dielektrischen Verschiebung im Innern des Kondensators und der Oberflächenladungsdichte besteht bekanntlich die Beziehung

$$|\mathfrak{D}| = \sigma.$$

Aus der Abb. 215, die die Vorzeichenverhältnisse darstellt, ist zu entnehmen, daß bei einer Stromrichtung von rechts nach links auf der rechten Platte des Kondensators die positive Ladung zunimmt; damit wächst auch der Verschiebungsvektor an. Es besteht demnach auch die Vektorbeziehung. Wenn man also zum Vektor der Stromdichte formal den Ausdruck $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$ addiert,

so wird dadurch der Stromkreis geschlossen. Wo die Linien der Leitungsstromdichte enden, beginnen in derselben Zahl die Linien des Vektors $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$, und wo diese an der anderen Platte enden, beginnen die Linien der Stromdichte. $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$ wird Verschiebungsstromdichte genannt. Bisher wurde also festgestellt, daß die Divergenz des Vektors $\mathfrak{G} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt}$ überall gleich Null ist:

$$\operatorname{div}\left(\mathfrak{G} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right) = 0. \tag{4.6.2}$$

Abb. 215. Verschiebungsstromdichte

Wenn wir daher die Differentialform des Erregungsgesetzes verallgemeinert schreiben

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt}, \tag{4.6.3}$$

so ist sicher, daß kein Widerspruch besteht, denn die Divergenz beider Seiten ist Null. Es ist nur noch die Frage, ob die Verschiebungsstromdichte in Wirklichkeit, entsprechend der Gleichung (4.6.3), zur Bildung des magnetischen Feldes beiträgt. Die Experimente haben diese von MAXWELL auf spekulative Weise gewonnene Gesetzmäßigkeit weitgehend bewiesen: *Die Verschiebungsstromdichte $d\mathfrak{D}/dt$ besitzt ein ebensolches magnetisches Feld wie die Stromdichte des Leitungsstromes.*

Den physikalischen Inhalt der Gleichung (4.6.3) veranschaulicht die Abb. 216. Im Falle a) fließt nur ein Leitungsstrom, der allein die magnetische Feldstärke bestimmt. Im allgemeinen Falle b) wird die magnetische Feldstärke von der

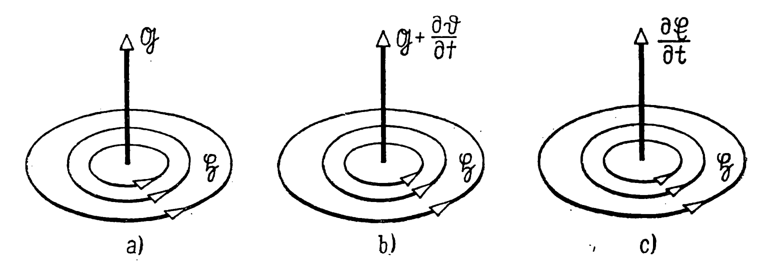


Abb. 216. Magnetisches Feld von Leitungs- und Verschiebungsstromdichte

Leitungsstromdichte und der Verschiebungsstromdichte gemeinsam erzeugt. Im Falle c) fließt überhaupt kein Leitungsstrom, und das magnetische Feld wird durch die Änderung der elektrischen Feldstärke hervorgerufen.

Die Tatsache, daß durch die zeitliche Änderung der elektrischen Feldstärke ein magnetisches Feld erzeugt werden kann, war seinerzeit so ungewohnt, daß man diese Magnetisierungswirkung unbedingt mit der Bewegung von Ladungen in Zusammenhang bringen wollte. Es ist auch tatsächlich so, daß in Isolatoren mit der Änderung des Verschiebungsvektors auch verschiedene Ladungsbewegungen auftreten. Wir werden später sehen, daß erstens diese Ladungsbewegungen nur einen Teil der Verschiebungsstromdichte ausmachen und zweitens durch die Änderung der elektrischen Feldstärke auch im Vakuum ein magnetisches Feld erzeugt wird, wo von einer Ladungsbewegung überhaupt keine Rede sein kann. Man muß es als ein Grundgesetz anerkennen, das zur Zeit weiter nicht erklärt oder auf Bekanntes zurückgeführt werden kann, daß die Änderung der elektrischen Feldstärke eine magnetische Feldstärke erzeugen kann.

4.7. Einige einfache Feldbeziehungen

1. Als einfachsten Fall wollen wir das magnetische Feld untersuchen, welches durch die Änderung des elektrischen Feldes eines Plattenkondensators entsteht, darüber hinaus dessen Rückwirkung auf das ursprüngliche Feld. Vorausgesetzt, daß das Feld des Kondensators homogen ist, kann man mit einer räumlich konstanten Stromdichte

$$\mathfrak{G} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega \mathfrak{E}_0 \cos \omega t \tag{4.7.1}$$

rechnen. Das magnetische Feld wächst, wie wir im Abschnitt 3.10. sahen, linear bis zum Rand des Kondensators an und sinkt dann außen hyperbolisch ab. Sein Höchstwert

$$H_0 = \frac{\varepsilon_0 E_0 \omega r_0}{2}$$

kann aus dem Erregungsgesetz berechnet werden:

$$2\pi r_0 H_0 = \varepsilon_0 E_0 \omega \pi r_0^2 .$$

Das magnetische Feld ändert sich zeitlich gleichfalls periodisch und erzeugt daher ein elektrisches Feld. Die Größe dieses elektrischen Feldes kann

man aus dem Induktionsgesetz bestimmen. Wenn man die induzierte Feldstärke entlang der in der Abb. 217 ersichtlichen Linie integriert, erhält man

$$E_a - E_i = \frac{\mu_0 \omega H_0 r_0}{2}. \tag{4.7.2}$$

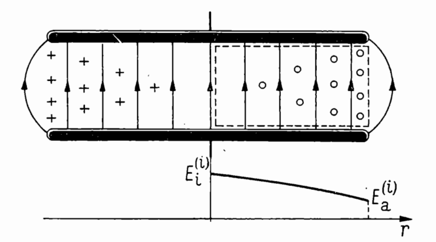


Abb. 217. Magnetisches Feld eines Kondensators mit veränderlichem elektrischem Feld

Es ist von Interesse, die Größenordnung dieser Beziehung näher zu untersuchen. Wir bilden dazu das Verhältnis dieses Wertes zu der ursprünglichen Feldstärke E_0:

$$\frac{E_a - E_i}{E_0} = \frac{\dfrac{\mu_0 \omega H_0 r_0}{2}}{\dfrac{2H_0}{\varepsilon_0 \omega r_0}} = \frac{1}{4}\,\varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 r_0^2. \tag{4.7.3}$$

Da $\varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} = \left(\dfrac{2\pi f}{c}\right)^2 = \left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2$ ist, gilt auch

$$\frac{E_a - E_i}{E_0} = \left(\frac{\pi r_0}{\lambda}\right)^2. \tag{4.7.4}$$

Daraus ist ersichtlich, daß in den Fällen, in denen die Wellenlänge, die man der zeitlichen Änderung zuordnen kann, groß ist im Verhältnis zum Halbmesser oder zum Umfang des Kondensators, die Rückwirkung des magnetischen Feldes vernachlässigt werden kann. Wenn aber die Kreisfrequenz ω sehr groß und die Wellenlänge demnach klein ist, führt die Annahme einer gleichmäßigen Dichte des Verschiebungsstromes zu einem falschen Ergebnis. In diesem Fall erhalten wir, analog zum Skin-Effekt, eine Phasenverschiebung, die auch von r abhängt, was hier wie dort zum Auftreten elektromagnetischer Wellen führt.

2. Jetzt soll ein komplizierterer Fall untersucht werden. Das elektrische Feld soll sich gemäß der Beziehung

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{k} E_z = \mathfrak{k} E_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \sin\omega t \tag{4.7.5}$$

ändern (Abb. 218). Die Feldverteilung ergibt sich wie folgt: Es soll das homogene, zeitlich veränderliche Feld eines aus zwei viereckigen Platten bestehenden Kondensators in ein ideales, demnach unendlich gut leitendes Metallgehäuse eingeschlossen werden, und zwar so, daß zunächst nur zwei einander gegenüberliegende Seiten abgeschlossen werden. In dieser auf zwei Seiten offenen Dose kann das homogene Feld nicht mehr weiterbestehen, da in der unendlich gut

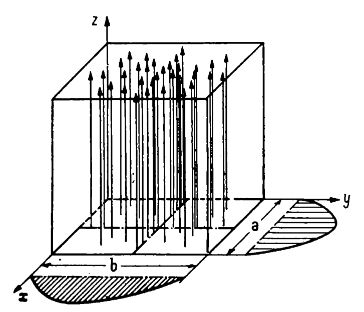
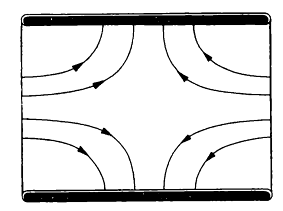


Abb. 218. Feldverteilung im Innern einer Metalldose


Abb. 219. Deformierung der elektrischen Kraftlinien

leitenden Wand unendlich große Ströme fließen würden. Wenn wir verlangen, daß in der Wand endliche Ströme fließen sollen, dann muß die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes Null sein. Man könnte sich vorstellen, daß sich die elektrischen Kraftlinien so deformieren, wie es in der Abb. 219 skizziert ist, daß sie also zur Metallwand senkrecht verlaufen und die Grenzbedingungen in dieser Weise befriedigen. Im einfachsten Fall behalten die Kraftlinien ihre ursprüngliche Richtung bei, doch sinkt ihre Dichte von der Mitte gegen die Wand zu nach rechts und nach links auf Null. Es gibt viele Funktionen, die diesen Verlauf befriedigen können. Es ist plausibel, wenn wir die für uns hier am besten geeignete Funktion, die Sinusfunktion, wählen. Man kann zeigen, daß man bei prismenähnlichen Hohlräumen diese Funktion sogar wählen *muß*. Der mehr symmetrische zylinderförmige Hohlraum wird nicht behandelt, weil die Beschreibung des elektrischen Feldes mit Hilfe von BESSEL-Funktionen erfolgt, welche gegenüber den trigonometrischen Funktionen schwieriger zu behandeln sind. Die Sinusfunktion $\sin\frac{\pi x}{a}$ liefert in den Punkten $x = 0$ und $x = a$ tatsächlich Null und hat in der Mitte ein Maximum.

Wenn jetzt die Dose vollkommen verschlossen wird, muß die elektrische Feldstärke auch in der anderen Richtung zu den Wänden hin bis auf Null fallen. Das sichert der Faktor $\sin\frac{\pi y}{b}$.

Den Verlauf der elektrischen Kraftlinien zeigt Abb. 218. Man stelle sich die Sache so vor, daß dieses Feld, seine Verteilung im Raum unverändert beibehaltend, sich zeitlich sinusförmig ändert. Wo die Dichte der Kraftlinien ansteigt, wird selbstverständlich eine steigende Ladungsdichte influenziert. Dementsprechend fließen Ströme in den Seiten des Prismas, von welchen

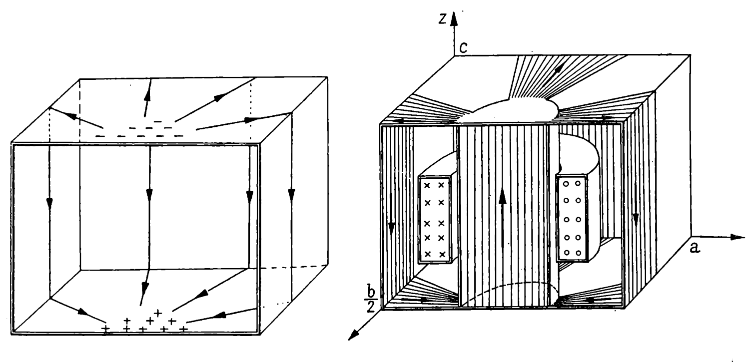


Abb. 220. Flächenladung und Flächenströme

Abb. 221. Verschiebungsstrom als Teil einer „Erregungsspule"

diese Ladungen geliefert werden. In Abb. 220 und 221 sind die Verteilung der Kraftliniendichte, die dazu gehörende Oberflächenladungsdichte, die Flächenstromdichte sowie die Verschiebungsstromdichte eingezeichnet. So zeigt sich in diesem etwas verwickelten Fall anschaulich, daß die Verschiebungsstromdichte durch den Leitungsstrom an den Wänden zu einem geschlossenen Stromkreis ergänzt wird. Damit entsteht nach Abb. 221 ein System von

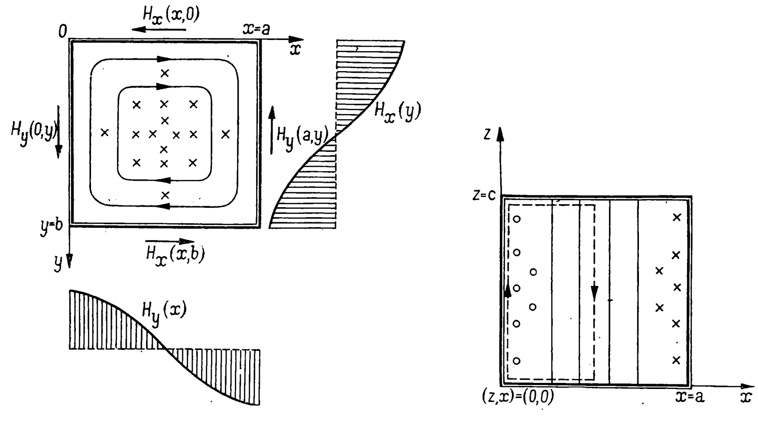


Abb. 222. Magnetisches Feld zu Abb. 218

Erregungsspulen, durch welches selbstverständlich ein magnetisches Feld erzeugt wird, dessen qualitativer Verlauf ohne Schwierigkeiten aufgezeichnet werden kann (Abb. 222). Es kann auf alle Fälle festgestellt werden, daß das magnetische Feld keine Komponente in der z-Richtung besitzt.

Wenn man die Komponenten H_x und H_y untersucht, so ist festzustellen, daß die eine in der Mitte ihren maximalen Wert erreicht und an den abgrenzenden Wänden Null ist, wogegen die zweite in der Mitte den Wert Null, an den beiden Seiten einen gleichgroßen Wert, doch mit entgegengesetztem Vorzeichen, annimmt. Die einfachsten derartigen Funktionen sind

$$H_x = H_0 a \sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\cos\omega t, \tag{4.7.6}$$

$$H_y = -H_0 b\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\cos\omega t. \tag{4.7.7}$$

Es kann gezeigt werden, daß sich diese Funktionen bei der Behandlung dieses Problems auch als Lösungen der MAXWELL-Gleichungen ergeben. Daß die Amplituden proportional zu a und b sind, wird durch die Quellenfreiheit der H-Linien plausibel: Diese verlaufen dichter entlang der längeren Seite.

Der Wert der auftretenden Größen ist unabhängig von z, so daß die Kraftlinienverteilung in jeder beliebigen Ebene $z = \text{const}$ dieselbe ist.

Durch Anwendung des Erregungsgesetzes auf die Grenzlinien der Grundfläche ergibt sich gemäß Abb. 222

$$\begin{aligned}\int_{y=0}^{b} H_y(0, y)\,dy + \int_{x=0}^{a} H_x(x, b)\,dx + \int_{y=b}^{0} H_y(a, y)\,dy \\ + \int_{x=a}^{0} H_x(x, 0)\,dx \\ = -\varepsilon_0\omega E_0\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\sin\pi\frac{x}{a}\sin\pi\frac{x}{b}\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{4.7.8}$$

Sämtliche vorkommenden Funktionen sind bekannt, die Integration liefert

$$2\frac{2H_0a^2}{\pi} + 2\frac{2H_0b^2}{\pi} = 4\varepsilon_0\omega E_0\frac{ab}{\pi^2}. \tag{4.7.9}$$

Nach Vereinfachung ergibt sich

$$H_0(a^2 + b^2) = \varepsilon_0\omega E_0\frac{ab}{\pi} \quad \text{oder} \quad \frac{E_0}{H_0} = \frac{(a^2 + b^2)\,\pi}{ab\omega\varepsilon_0}. \tag{4.7.10}$$

Bisher sind wir folgendem Gedankengang nachgegangen: Es wurde in irgendeiner Weise die elektrische Feldverteilung gemäß der Funktion $E = E(x, y, z, t)$ erzeugt. Dieser Verteilung wurde das magnetische Feld $H = H(x, y, z, t)$ zugeordnet, von welchem sogar behauptet wurde, daß es im gegebenen Fall die einzig mögliche Lösung darstellt. Den Gedankengang weiterführend, muß gefragt werden, welche elektrische Feldverteilung wiederum durch dieses sich sinusförmig ändernde magnetische Feld hervorgerufen wird. Wir behaupten, daß gerade die Ausgangsverteilung $\mathfrak{E}$ hervorgerufen wird. Wir wollen diese Behauptung akzeptieren und untersuchen, zu welchen Aussagen dies führt. Das Induktionsgesetz, auf die in Abb. 222b eingezeichnete geschlossene Linie angewendet, liefert

$$- E_0 c + 0 = - \omega \int_{z=0}^{c} \int_{x=0}^{a/2} \mu_0 H_y \left(x, \frac{b}{2}\right) dx\, dz = - c H_0 \frac{ba}{\pi} \mu_0 \omega . \tag{4.7.11}$$

Daraus ergibt sich der Zusammenhang

$$\frac{E_0}{H_0} = \frac{ab}{\pi} \mu_0 \omega . \tag{4.7.12}$$

Dafür haben wir bereits durch das Erregungsgesetz in Gleichung (4.7.10) einen Zusammenhang erhalten. Die zwei Ergebnisse müssen natürlich identisch sein, wenn wir erreichen wollen, daß das magnetische und das elektrische Feld verträglich mit sich selbst existieren können:

$$\frac{E_0}{H_0} = \frac{(a^2 + b^2)\,\pi}{ab\omega\varepsilon_0} = \frac{ab}{\pi} \mu_0 \omega . \tag{4.7.13}$$

Mit $\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$ erhält man die Gleichung

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \tag{4.7.14}$$

oder

$$f = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} . \tag{4.7.15}$$

In einem Hohlraum mit den Kantenlängen a, b, c kann demnach ein durch die Gleichungen (4.7.5) bzw. (4.7.6) und (4.7.7) beschriebener Schwingungszustand dann existieren, wenn zwischen der Frequenz der Schwingung und den geometrischen Abmessungen des Hohlraums die Beziehung (4.7.15) besteht. In

diesem Fall sind das elektrische und das magnetische Feld ohne jede äußere Einwirkung, sich gegenseitig erzeugend, gegenwärtig. Der durch ideale Metallplatten begrenzte Hohlraum ist also ein Schwingungssystem, dessen Wellenlänge bzw. Frequenz von den geometrischen Abmessungen des Hohlraums abhängt.

Die Richtigkeit unserer Behauptungen können wir auch dadurch beweisen, daß wir in die Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathfrak{H}}{dt}$$

die angenommenen Werte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ einsetzen und uns dann vergewissern, daß bei Beachtung der Bedingung (4.7.13) diese Gleichungen tatsächlich befriedigt werden. Die Rotation kann ohne weiteres gebildet werden. So ist die erste Komponente der ersten Vektorgleichung

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \omega E_x = 0.$$

Da H_y von z nicht abhängt und H_z gleich Null ist, ergibt diese Gleichung sofort die Identität $0 \equiv 0$.

Die dritte Komponente ist

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon_0 \omega E_z.$$

Durch Einsetzen der Werte H_x und H_y entsteht, wenn man durch das gemeinsame Produkt $\sin \pi \frac{x}{a} \cdot \sin \pi \frac{y}{b}$ dividiert, die Gleichung

$$a \frac{\pi}{b} H_0 + b \frac{\pi}{a} H_0 = \varepsilon_0 \omega E_0.$$

Daraus erhält man direkt die Bedingung (4.7.10), welche damit befriedigt wurde.

Die zweite Bedingungsgleichung (4.7.12) erhalten wir, indem wir die obigen Gleichungen in die zweite MAXWELLsche Gleichung einsetzen, wovon sich der Leser selbst überzeugen möge.

4.8. Das magnetische Feld bewegter Ladungen

Bei der Besprechung des Induktionsgesetzes wurde bereits gezeigt, daß in bezug auf die Kraftwirkung eine sich bewegende Ladung einem Stromelement

äquivalent ist, das durch die Beziehung

$$Q\mathfrak{v} = I\,d\mathfrak{l} \tag{4.8.1}$$

bestimmt ist. Es soll nun untersucht werden, welches magnetische Feld zu dieser bewegten Ladung gehört.

In dem einfachen Fall, daß sich die Ladung auf einer Kreisbahn mit n Umdrehungen je Sekunde bewegt, ist aus der Abb. 223 direkt zu entnehmen, daß

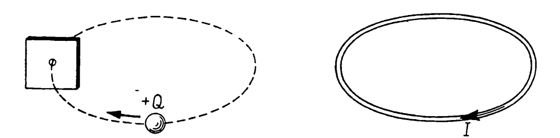


Abb. 223. Bewegte Ladung auf einer Kreisbahn

durch jeden Abschnitt der Bahn Qn Ladungen je Zeiteinheit hindurchlaufen. Dementsprechend ist eine magnetische Wirkung zu erwarten, die mit der Wirkung eines Stromes im kreisförmigen Leiter übereinstimmt, wenn zwischen der Ladung und der Stromstärke die Beziehung

$$I = Qn \tag{4.8.2}$$

besteht. Da die Geschwindigkeit der Ladung

$$v = \frac{2\pi\, r}{T} = 2\pi\, rn \tag{4.8.3}$$

ist, gilt an Stelle von Gleichung (4.8.1) auch

$$2\pi\, r\, I = Qv, \tag{4.8.4}$$

woraus man dieselbe Beziehung erhält, die bereits auf Grund der Kraftwirkung bestimmt wurde.

Die Gleichwertigkeit einer um eine Achse rotierenden Ladung mit einem Kreisstrom kann auch experimentell durch die in der Abb. 224 gezeigte

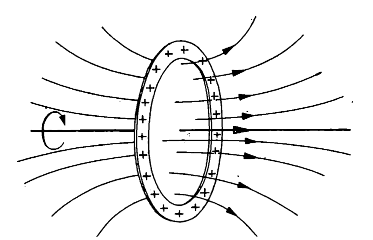


Abb. 224. Nachweis des magnetischen Feldes bewegter Ladungen

Anordnung nachgewiesen werden. Ein geladener Metallring wird mit großer Geschwindigkeit gedreht. Bei Kenntnis der Drehzahl und durch Messung des magnetischen Feldes findet man die Gleichung (4.8.4) bestätigt.

Bewegt sich also eine Ladung Q mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, so ist sie vom Standpunkt ihrer Magnetisierungswirkung gleichwertig dem Stromelement $Q\mathfrak{v}$, entsprechend der Beziehung (4.8.1).

Wir denken uns jetzt die Ladung Q in einem Zylinder von der Höhe dl und der Grundfläche dA gleichmäßig verteilt. Dividieren wir die Gleichung (4.8.1) durch $dl\,dA = dV$, erhalten wir

$$\frac{Q}{dA\,dl}\mathfrak{v} = \frac{I}{dA}d\mathfrak{l}^0,$$

wofür wir auch

$$\varrho\mathfrak{v} = \mathfrak{G} \tag{4.8.5}$$

schreiben können. Demzufolge ist das Produkt $\varrho\mathfrak{v}$ in bezug auf die magnetische Wirkung der Stromdichte gleichwertig.

Wir betrachten jetzt eine elektrische Ladung, welche sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig bewegt. Auf Grund der bisherigen Ausführungen kann die magnetische Feldstärke in beliebigen Punkten des Raumes bestimmt werden. Nach dem BIOT-SAVARTschen Gesetz würde im Punkt P der Abb. 225 die magnetische Feldstärke

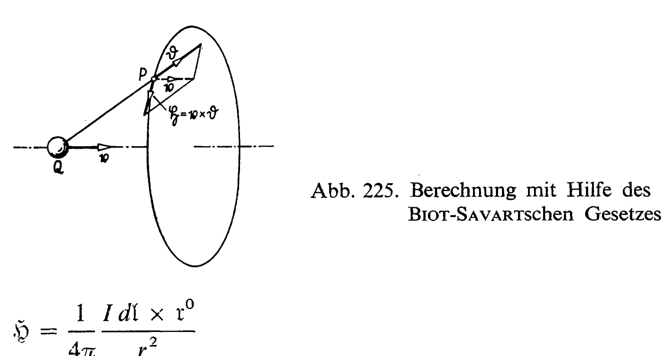


Abb. 225. Berechnung mit Hilfe des BIOT-SAVARTschen Gesetzes

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{I\,d\mathfrak{l} \times \mathfrak{r}^0}{r^2}$$

sein, wenn man an Stelle der sich bewegenden Ladung das Stromelement $I\,d\mathfrak{l}$ einsetzt. Da das Produkt $Q\mathfrak{v}$ eine dem Stromelement gleichwertige Wirkung besitzt, wird die magnetische Feldstärke

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\mathfrak{v} \times \mathfrak{r}^0. \tag{4.8.6}$$

Berücksichtigt man, daß die dielektrische Verschiebung dieser als punktförmig betrachteten Ladung im Punkt P

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\mathfrak{r}^0 \tag{4.8.7}$$

ist, so erhält man für die magnetische Feldstärke

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{D}. \tag{4.8.8}$$

Diese Gleichung ist ganz analog aufgebaut wie die Gleichung

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{B},$$

und sie läßt sich analog in ihrer Integralform folgendermaßen deuten: Bei einer bewegten Ladung ist das Linienintegral des magnetischen Feldes gleich der Zahl der Verschiebungslinien, welche von der Linie geschnitten werden.

Die Gleichung (4.8.8) legt es nahe, bei der Berechnung der magnetischen Feldstärke den tatsächlichen Verhältnissen dadurch besser gerecht zu werden, daß man versucht, das magnetische Feld einer bewegten Ladung mit Hilfe des Verschiebungsstromes zu berechnen. Bewegt sich eine Ladung, so ändert sich die dielektrische Verschiebung in jedem Punkt des Raumes zeitlich. Es entsteht demnach ein magnetisches Feld. Bei der Berechnung des magnetischen Feldes muß man daher den Satz anwenden, daß das Linienintegral des magnetischen Feldes gleich der zeitlichen Änderung des Flächenintegrals des elektrischen Verschiebungsvektors, d. h. gleich dem durch die geschlossene Linie umfaßten Verschiebungsstrom ist. Man braucht also nur zu untersuchen, wie viele Verschiebungslinien während der Zeiteinheit durch die von der geschlossenen Linie berandeten Fläche treten. Als Integrationsweg soll ein mit den magnetischen Kraftlinien zusammenfallender Kreis angenommen werden

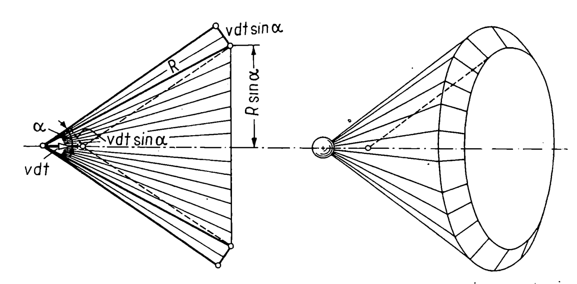


Abb. 226. Berechnung mit Hilfe des Verschiebungsstromes

(Abb. 226). Durch eine über diesen Kreis gespannte Fläche tritt dann in der Zeiteinheit eine bestimmte Anzahl Verschiebungslinien hindurch. Die Gesamtzahl dieser Linien ist für uns uninteressant, da nur die Änderung der Linienzahl

von Belang ist. Nach einer kleinen Zeitspanne dt ist die Ladung der durch den Integrationsweg bestimmten Fläche näher gekommen, so daß dann mehr Verschiebungslinien durch diese Fläche hindurchtreten als zuvor. Der Abbildung kann entnommen werden, daß nach der Zeit dt alle Verschiebungslinien zusätzlich durch die Fläche treten, die sich zuvor in einem räumlichen Kreiskegel mit der Breite $v\,dt \sin\alpha$ befanden. Die ganze Oberfläche des Kreisringes ist

$$dA = 2\pi R \sin\alpha \cdot v\,dt \cdot \sin\alpha = 2\pi R \sin^2\alpha \cdot v\,dt,$$

so daß der Kraftfluß des Verschiebungsvektors

$$d\Psi = 2\pi R \sin^2\alpha \cdot v\,dt \cdot D$$

beträgt. Die auf die Zeiteinheit entfallende Änderung des Kraftflusses ist

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{2\pi R \sin^2\alpha \cdot v\,dt \cdot D}{dt} = 2\pi R \sin^2\alpha \cdot v \cdot D.$$

Dieser Betrag muß dem Linienintegral des magnetischen Feldes gleich sein:

$$2\pi R \sin^2\alpha \cdot v \cdot D = H \cdot 2\pi R \sin\alpha.$$

Daraus erhalten wir wieder die Beziehung (4.8.8):

$$H = Dv \sin\alpha.$$

Abb. 227a zeigt, wie der offene Stromkreis einer bewegten Ladung durch die Verschiebungsstromlinien geschlossen wird. Die Konstruktion der Stromdichte $\partial\mathfrak{D}/\partial t$ geht aus Abb. 227b hervor.

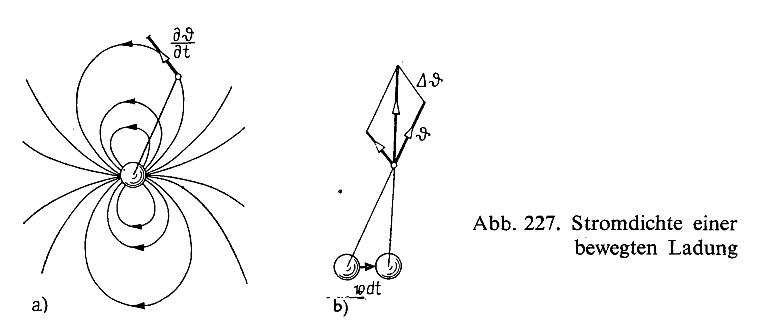


Abb. 227. Stromdichte einer bewegten Ladung

Beispiele und Ergänzungen

1. Wir untersuchen die zeitliche Änderung der Verschiebungsstromdichte und der Konvektionsstromdichte, welche zur bewegten Ladungsdichte $\varrho\mathfrak{v}$ gehören. Es soll angenommen werden, daß sich eine Kugel mit dem Halbmesser r

und mit konstanter Ladungsdichte ϱ entlang der x-Achse von $x = -\infty$ nach $x = +\infty$ bewegt. Die Änderung der Konvektions- und Verschiebungsstromdichte soll im Punkt $x = 0$ untersucht werden. Solange die Kugel den Punkt $x = 0$ nicht erreicht bzw. noch nicht überschritten hat, ist der Wert der Verschiebung

$$D = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{x^2}.$$

Wenn die Kugel den Punkt $x = 0$ überschritten hat, ist

$$D = -\frac{1}{4\pi} \frac{Q}{x^2},$$

wobei x die Entfernung des Kugelmittelpunktes vom Koordinatenmittelpunkt bedeutet. Entsprechend ist der Wert der Verschiebungsstromdichte im Intervall $-\infty < x < -r$

$$G_v = \frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi} \frac{Q}{x^3} v,$$

dagegen im Intervall $r < x < +\infty$

$$G_v = \frac{\partial D}{\partial t} = +\frac{1}{2\pi} \frac{Q}{x^3} v.$$

Gleichzeitig ist der Wert der Konvektionsstromdichte gleich Null, d. h.

$$G_k = 0.$$

Wenn $|x| < r$ ist, fällt der Punkt $x = 0$ in das Innere der Kugel. Dann sind

$$D = -\frac{Qx}{4\pi r^3}, \quad \frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{Qv}{4\pi r^3}$$

und

$$G_k = \varrho v = \frac{3Qv}{4\pi r^3}.$$

Abb. 228 zeigt die Verschiebungsstromdichte, die Konvektionsstromdichte und deren Resultierende. In der unmittelbaren Umgebung des Ursprunges ist bei der Entstehung des magnetischen Feldes im Fall einer sich langsam bewegenden Ladung die Resultierende der Stromdichte maßgebend. Man kann leicht nachweisen, daß man – wenn man in jedem Zeitpunkt den Gesamtstrom

über die gesamte Fläche integriert – durch das Zeitintegral der so erhaltenen Größen jene Ladung bekommt, welche den Querschnitt durchschreitet. Mit anderen Worten: das Zeitintegral des Verschiebungsstromes (und nicht der Stromdichte) ergibt Null.

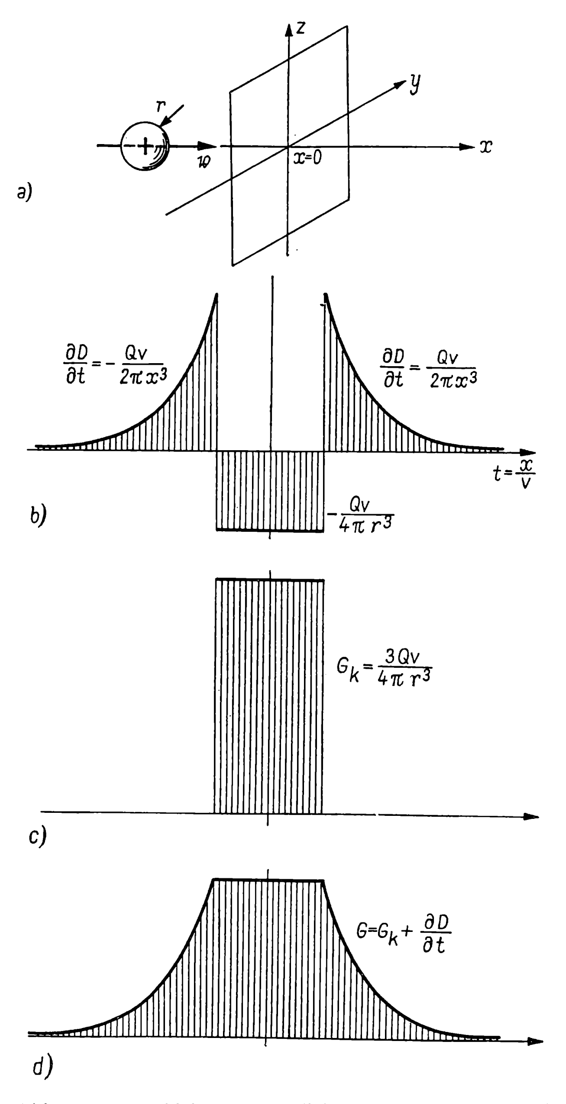


Abb. 228. Verschiebungsstromdichte, Konvektionsstromdichte und deren Resultierende

Dies alles ist deshalb von Bedeutung, weil man bei einer Leitung allgemein nur mit der Magnetisierungswirkung des Konvektionsstromes rechnet; dies ist nach unseren Überlegungen deshalb zulässig, weil bei sehr vielen Teilchen sich die magnetisierende Wirkung des Verschiebungsstromes statistisch ausgleicht.

2. Zwischen zwei Kondensatorplatten bewege sich unter dem Einfluß des Kondensatorfeldes oder eines fremden Feldes eine elektrische Ladung fort (Abb. 229).

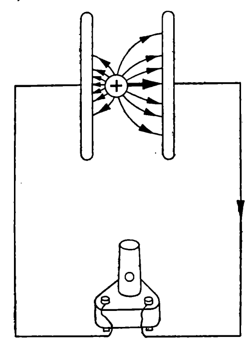


Abb. 229. Bewegte Ladung zwischen Kondensatorplatten

Die von der Ladung ausgehenden Verschiebungslinien enden an den Oberflächen der Elektroden. So wie die Ladung von der einen Platte zur anderen wandert, ändert sich die Größe des resultierenden Verschiebungsvektors an der Oberfläche, und es entsteht im äußeren Stromkreis ein Leitungsstrom, der diesen Verschiebungsstrom schließt. Diese Stromstärke bleibt so lange konstant, wie sich die Ladung zwischen beiden Platten befindet. Es ist selbstverständlich, daß das Zeitintegral der Stromstärke stets gleich dem Wert der betreffenden Ladung sein muß.

4.9. Zusammenfassung

Im ersten Teil dieses Kapitels haben wir einen Zusammenhang zwischen der Stromdichte und der magnetischen Feldstärke in der Form

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G}$$

gefunden. Jetzt wissen wir schon, daß auch die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes mit einem magnetischen Feld verknüpft ist. Mit anderen Worten: Die Verschiebungsstromdichte erzeugt auch ein magnetisches Feld. Durch diese Ergänzung lautet nun die allgemeinere Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}.$$

Dies ist die I. MAXWELLsche Gleichung. Es ist manchmal üblich, die Größe der Leitungsstromdichte $\mathfrak{G}_L = \gamma\mathfrak{E}$ und der Konvektionsstromdichte $\mathfrak{G}_k = \varrho_+\mathfrak{v}_+ + \varrho_-\mathfrak{v}_-$ gesondert zu schreiben. So wird die ganz allgemein formulierte erste MAXWELLsche Gleichung

$$\text{I:} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{H} = \gamma\mathfrak{E} + \varrho_+\mathfrak{v}_+ + \varrho_-\mathfrak{v}_- + \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}.$$

Entsprechend haben wir die zweite MAXWELLsche Gleichung

$$\text{II:} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}.$$

Berücksichtigen wir noch die beiden Gleichungen

$$\text{III:} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0,$$

$$\text{IV:} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho,$$

so haben wir die vier MAXWELLschen Gleichungen in ihrer endgültigen *Form*. Ihr *Inhalt* wird aber noch durch die Berücksichtigung der Wirkungen der Materie wesentlich erweitert.

5. Das elektromagnetische Feld im stofferfüllten Raum

Das elektrische Feld in Anwesenheit von Leitern

5.1. Beziehung zwischen elektrischer Feldstärke und Stromdichte

Wir wissen bereits, daß im Innern von homogenen Leitern entsprechend der Beziehung $\mathfrak{G} = \gamma\mathfrak{E}$ eine Stromdichte auftritt, die der elektrischen Feldstärke proportional ist. Die Leitfähigkeiten γ und ihre reziproken Werte, die spezifischen Widerstände ϱ, haben für verschiedene Stoffe sehr unterschiedliche Werte (Abb. 230). Darüber hinaus hängt der spezifische Widerstand der einzelnen Stoffe von der Temperatur ab (Abb. 231).

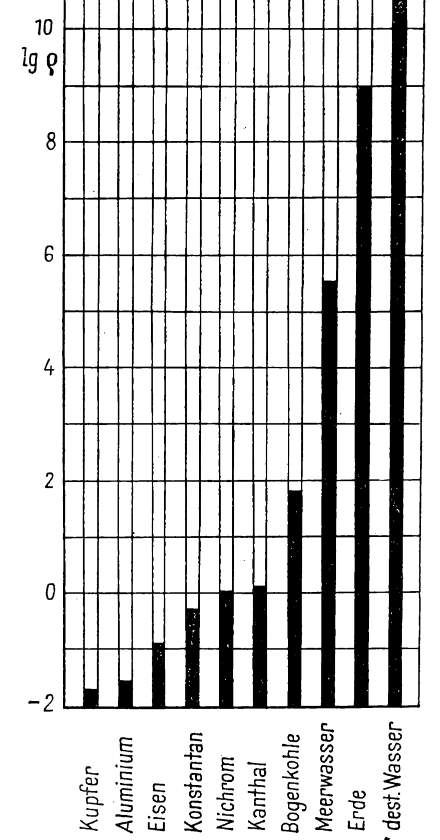


Abb. 230. Spezifischer Widerstand einiger Stoffe

In der Umgebung der Zimmertemperatur ist diese Abhängigkeit annähernd linear. Nahe dem absoluten Nullpunkt, bei der sogenannten Sprungtemperatur, sinkt bei vielen Stoffen der Widerstand auf einen unmeßbar kleinen Wert.

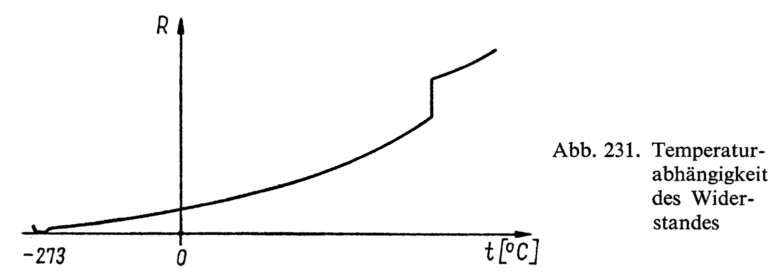


Abb. 231. Temperaturabhängigkeit des Widerstandes

Man sagt, die Stoffe werden bei ihrer Sprungtemperatur supraleitend. Von der Zimmertemperatur ausgehend, steigt bei höheren Temperaturen der Widerstand meist stärker als linear. Sprunghafte Änderungen treten bei Temperaturen auf, bei welchen sich die Struktur oder der Aggregatzustand des metallischen Leiters ändert, so z. B. beim Schmelzpunkt oder bei Umkristallisierung eines Stoffes.

Die lineare Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur (Abb. 232) kann ausgedrückt werden durch die Beziehung

$$R_t = R_{20} + R_{20} \cdot \alpha(t - 20) = R_{20}[1 + \alpha(t - 20)].$$

Abb. 232. Temperaturabhängigkeit des Widerstandes in der Nähe der Zimmertemperatur

R_{20} ist dabei der Widerstand bei 20 °C. Den Proportionalitätsfaktor α nennt man den Temperaturkoeffizienten des Widerstandes. α ist bei den meisten reinen Metallen von der Größe $4 \cdot 10^{-3}$ bis $5 \cdot 10^{-3}$/grd. Der Widerstand dieser Metalle ändert sich also verhältnismäßig stark mit der Temperatur, z. B. bei einer Temperaturdifferenz von 100 grd um 40 bis 50%.

Einige Metallegierungen, wie z. B. Manganin oder Konstantan, haben dagegen einen so kleinen Temperaturkoeffizienten, daß er praktisch vernachlässigt werden kann. Diese Widerstände ändern sich daher mit der Temperatur nicht. Einige Stoffe, z. B. Kupferoxyd oder Uranoxyd, haben einen negativen Temperaturkoeffizienten. Bei ihnen nimmt der Widerstand mit steigender Temperatur ab („Heißleiter“).

Die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes eines Stoffes ist in vielen Fällen störend, und ihre Beseitigung ist nur mit großem Aufwand zu erreichen, so z. B. bei der Herstellung von Präzisionswiderständen oder großen Heizanlagen. Andererseits benutzt man auch diese Erscheinung z. B. zur Strombegrenzung oder zur Temperaturmessung.

Beispiele und Ergänzungen

1. Die höchste zulässige Stromstärke ist durch die Erwärmung des Leiters bestimmt. Die Temperatur erhöht sich so lange, bis die je Zeiteinheit entstehende JOULEsche Wärme der durch Kühlung abgegebenen Wärme gerade gleich ist. Die Berücksichtigung der Kühlverhältnisse ist ziemlich kompliziert. Zur größenordnungsmäßigen Orientierung sind in Abb. 233 die zulässigen Stromstärken für Leiter in freier Luft angegeben.

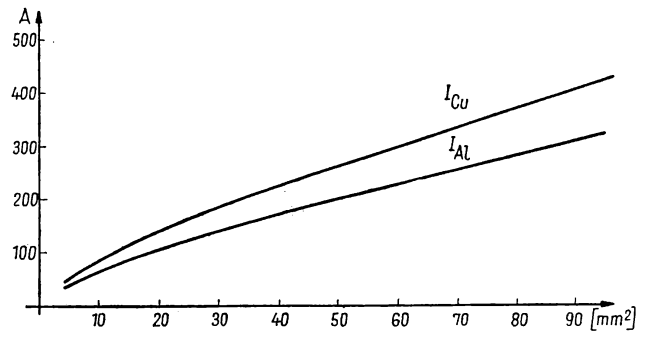


Abb. 233. Zulässige Stromstärke in Kupfer- und Aluminiumleitungen

2. Die elektrische Feldstärke ist im Innern der Leiter im allgemeinen sehr klein. In Kupfer ($\varrho = 0{,}0175\,\Omega\text{mm}^2/\text{m}$) z. B. wird bei einer Stromdichte von $G = 3\,\text{A/mm}^2$

$$E = \varrho G = 0{,}0175 \cdot 3 = 0{,}052\,\text{V/m} = 52\,\text{mV/m}.$$

In der Erde treten aber schon bei viel kleineren Stromdichten beträchtliche Feldstärken auf. Sind nämlich $\varrho \approx 10^8\,\Omega\text{mm}^2/\text{m}$ und $G = 10^{-2}\,\text{A/mm}^2$, so ist für das Entstehen einer solchen Stromdichte eine Feldstärke von

$$E = \varrho G = 10^8 \cdot 10^{-2} = 10^6\,\text{V/m}$$

nötig. Solche Werte können beim Blitzschlag in Erdungswiderständen auftreten.

3. Zwei verschiedene Metalle seien untereinander in Kontakt (Abb. 234). Der Strom möge nur parallel zur Trennfläche fließen. Dann hat $\mathfrak{E}$ nur Tangential-

komponenten, und wir können behaupten, daß $\mathfrak{E}$ auf beiden Seiten der Trennfläche gleiche Größe und Richtung haben muß. Sonst erhielten wir für das Linienintegral auf einem unendlich schmalen Umlauf nach Abb. 234 einen von Null verschiedenen Wert, was nicht einmal in einem Wirbelfeld möglich ist. Es gilt nämlich

$$E_1 l - E_2 l = dl \cdot l \frac{dB}{dt} \to 0,$$

wenn dl nach Null strebt, d. h. $E_1 = E_2$.

Das hier Gesagte gilt im allgemeinen Strömungsfeld verständlicherweise auch nur für die Tangentialkomponente.

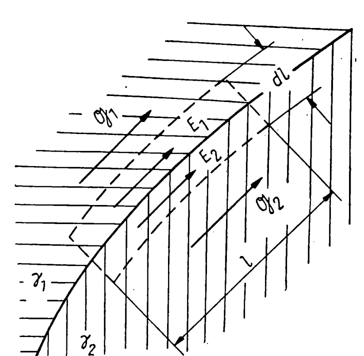


Abb. 234. Tangentialkomponente der Feldstärke

Die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke geht kontinuierlich durch die Trennfläche zweier verschiedener Stoffe.

Die Tangentialkomponente der Stromdichte erleidet daher im Sinne der Gleichungen

$$E_{1t} = \varrho_1 G_{1t} = E_{2t} = \varrho_2 G_{2t}$$

einen Sprung, und zwar gilt

$$G_{1t} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot G_{2t} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} G_{2t}.$$

4. Im magnetischen Feld werden bei einer bestimmten kritischen Feldstärke die Supraleiter wieder normalleitend. In der Abb. 235 sind die kritischen Feldstärken als Funktion der Temperatur für verschiedene Metalle angegeben. Es kann z. B. abgelesen werden, daß Blei bei 6 °K unter 200 Oe supraleitend ist, in Feldern über 200 Oe aber wieder normalleitend wird.

Obwohl die Erscheinungen der Supraleitfähigkeit theoretisch noch nicht vollständig geklärt sind, haben sie schon einige Anwendungen gefunden. So

zeigt z. B. Abb. 236 das „Cryotron“, ein bistabiles Schaltelement. Solche Elemente werden in verschiedenen Impulszähleinrichtungen und Rechenmaschinen verwendet. Sie arbeiten in folgender Weise: Alle Teile seien aus Supraleitern gebaut (auch die Erregerwicklungen). Es sei angenommen, daß

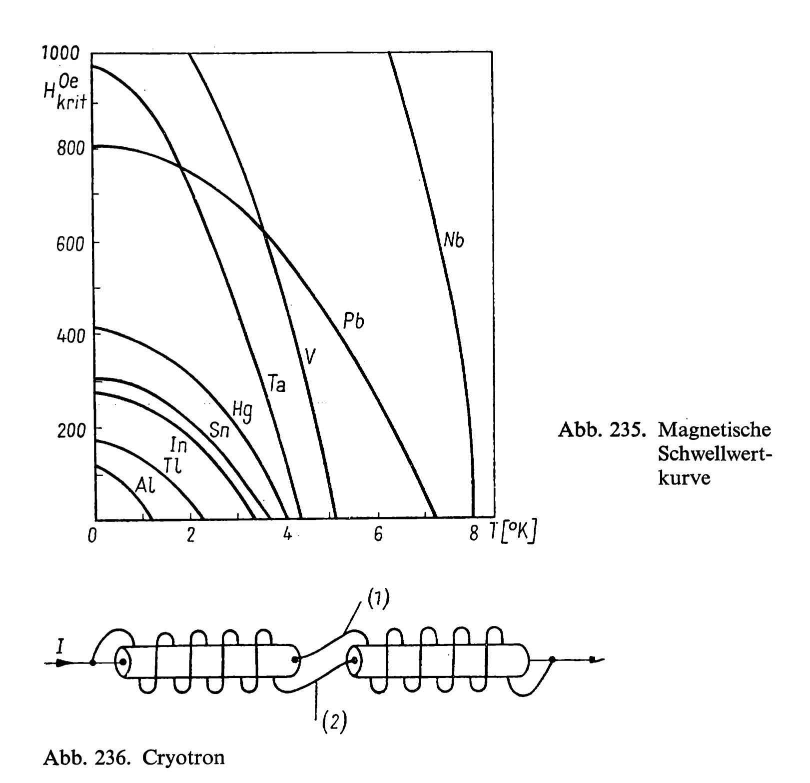


Abb. 235. Magnetische Schwellwertkurve

Abb. 236. Cryotron

in Zweig (1) der sonst symmetrischen Anordnung ein Strom von bestimmter Stärke fließt, in Zweig (2) jedoch nicht. Das ist ein stabiler Zustand, denn der im Zweig (2) liegende Leiter ist wegen des magnetischen Feldes des Stromes in Zweig (1) kein Supraleiter mehr, hat also im Verhältnis zum Zweig (1) einen sehr großen Widerstand. Wenn durch eine geeignete Schaltung der Zweig (2) durch einen äußeren Impuls momentan stromführend wird, kippt das System in den anderen stabilen Zustand, wo der Strom in Zweig (2) nunmehr den Zweig (1) normalleitend, d. h. R_{i1} sehr groß macht. Dieser Zustand bleibt so lange bestehen, bis durch einen erneuten Impuls wieder die erste Lage hergestellt wird.

5.2. Die Kontinuitätsgleichung

Durch ein beliebiges Flächenelement dA einer geschlossenen Fläche fließt während der Zeiteinheit die Ladungsmenge $G \cdot dA$ hindurch. Diese Größe bedeutet eine aus der geschlossenen Fläche austretende Ladung, wenn die Stromdichte eine Komponente in Richtung der positiven Normalen der Oberfläche besitzt, ihr Wert demnach positiv ist, sie bedeutet hingegen eine eintretende Ladung, wenn die Stromdichte eine Komponente in der Richtung der negativen, nach innen zeigenden Oberflächennormale hat, ihr Wert daher in diesem Fall negativ ist. Der Ausdruck $\int_A \mathfrak{G} \cdot d\mathfrak{A}$ ergibt also sofort die Differenz der ein- und ausströmenden Ladungen. Das Integral ist positiv, wenn mehr Strom aus- als eintritt. Dies ist physikalisch möglich, denn es bezeugt nur, daß im Volumen schon früher eine Ladung vorhanden war, welche sich dementsprechend vermindert hat. Die Tatsache, daß die Differenz zwischen ein- und austretenden Ladungen die Änderung der Ladung im Volumen ergibt, kann wie folgt geschrieben werden:

$$\int_A \mathfrak{G} \cdot d\mathfrak{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho \, dV. \tag{5.2.1}$$

Diese „Kontinuitätsgleichung" drückt die einfache Tatsache aus, daß in einem begrenzten Volumen Ladungen sich nur durch einen Zustrom anhäufen können.

Nach dem Satz von Gauss kann die linke Seite der Gleichung in folgender Weise geschrieben werden:

$$\int_A \mathfrak{G} \, d\mathfrak{A} = \int_V \operatorname{div} \mathfrak{G} \, dV.$$

Damit lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\int_V \operatorname{div} \mathfrak{G} \, dV = -\int_V \frac{\partial}{\partial t} \varrho \, dV.$$

Da diese Gleichung für jedes beliebige Volumen unabhängig von dessen Größe und Lage besteht, kann man auch schreiben

$$\operatorname{div} \mathfrak{G} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \tag{5.2.2}$$

Dies ist die zweite Form der Kontinuitätsgleichung.

Wenn man elektrischen Erscheinungen gegenübersteht, bei denen sich zeitlich nichts ändert (wie z. B. bei elektrostatischen oder mit Gleichstrom zusammenhängenden Erscheinungen), wo also die in einem gegebenen Volumen

befindliche Ladung konstant ist, wird die rechte Seite in (5.2.1) verschwinden, und folglich gilt

$$\int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A} = 0, \quad \operatorname{div}\mathfrak{G} = 0.$$

Dieser stationäre Fall ist aber keineswegs die Regel. Vielmehr ist es sehr oft möglich, daß im Volumen Ladungen angehäuft werden. Der Strom verhält sich also nur im stationären Zustand wie eine inkompressible Flüssigkeit. Sonst kann sein Verhalten eher mit dem der Gase verglichen werden.

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung können wir das Verhalten der Normalkomponente der Stromdichte an Trennflächen beurteilen. Wenden wir den GAUSSschen Satz auf die Stromdichte an der Fläche in Abb. 237 im stationären Zustand an, so ergibt sich

$$\int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A} = G_{n_1}\, dA - G_{n_2}\, dA = 0,$$

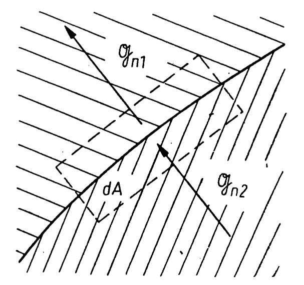


Abb. 237. Normalkomponente der Stromdichte

woraus die Gleichheit

$$G_{n_1} = G_{n_2}$$

folgt.

Die Normalkomponente der Stromdichte geht kontinuierlich durch die Trennfläche. Dabei erleidet jedoch die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke einen Sprung:

$$G_{n_1} = \gamma_1 E_{n_1} = G_{n_2} = \gamma_2 E_{n_2},$$

also

$$E_{n_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} E_{n_2}.$$

5.3. Analogie zwischen elektrostatischen Feldern und stationären Strömungsfeldern

Die erste Grundgleichung des stationären Strömungsfeldes ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung. Sie lautet

$$\operatorname{div} \mathfrak{G} = 0. \tag{5.3.1}$$

Zur zweiten Grundgleichung gelangen wir folgendermaßen. Da im stationären Zustand das elektrische Feld erfahrungsgemäß wirbelfrei ist, gilt

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0 = \operatorname{rot} \varrho\, \mathfrak{G}.$$

Hier haben wir schon den Zusammenhang $\mathfrak{E} = \varrho\, \mathfrak{G}$ benutzt. Wenn das untersuchte Volumen homogen mit Stoff ausgefüllt, also ϱ konstant ist, gilt weiter

$$\operatorname{rot} \mathfrak{G} = 0. \tag{5.3.2}$$

Die zwei Grundgleichungen (5.3.1) und (5.3.2) sind von gleicher Form wie die Grundgleichungen des elektrostatischen Feldes im homogenen Medium, wo keine Raumladungen vorhanden sind, also *zwischen* den Elektroden. Die wirkliche Identität der beiden Felder wird aber nur durch gleiche Grenzbedingungen gesichert. Die elektrische Feldstärke steht stets senkrecht auf der Elektrodenoberfläche. Die elektrische Stromdichte steht nur dann senkrecht, wenn die Zuführungselektroden eine unendlich große Leitfähigkeit besitzen. In diesem Fall wird die Tangentialkomponente

$$G_{1t} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} G_{2t} \to 0 \quad \text{mit} \quad \gamma_2 \to \infty .$$

Es seien jetzt nur zwei Elektroden von beliebiger Form in zwei Exemplaren gegeben. Zwischen diesen unendlich gut leitenden Elektroden liege im ersten Fall ein Stoff von endlicher Leitfähigkeit, im zweiten Fall sei der Zwischenraum mit einem Isolator ausgefüllt. Legen wir eine Spannung U an die Elektrode, so entsteht ein Strömungsfeld bzw. ein elektrostatisches Feld. Es wird uns bei der sich ausbildenden räumlichen Strömung in erster Linie der Widerstand der Anordnung interessieren, also das Verhältnis von Spannung zu Gesamtstrom:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{\int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A}},$$

wobei das Integral über die Fläche einer Elektrode zu erstrecken ist.

Da

$$I = \int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A} = \int_A \gamma\mathfrak{E}\, d\mathfrak{A}$$

und da weiter im elektrostatischen Feld $\mathfrak{E} = \mathfrak{D}/\varepsilon$ und $|\mathfrak{D}| = \sigma$ sind, wird der Gesamtstrom

$$I = \int_A \gamma\mathfrak{E}\, d\mathfrak{A} = \frac{\gamma}{\varepsilon}\int_A \mathfrak{D}\, d\mathfrak{A} = \frac{\gamma}{\varepsilon} Q,$$

und der Widerstand wird

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{\frac{\gamma}{\varepsilon} Q} = \frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{1}{C} = \varrho\varepsilon\frac{1}{C} \quad \text{oder} \quad RC = \varrho\varepsilon.$$

Bei bekannter Kapazität kann man also sofort den Widerstand einer Anordnung angeben oder umgekehrt. Somit sind die Lösungsprobleme der elektrostatischen Felder denen der stationären Strömungsfelder vollkommen äquivalent (Abb. 238).

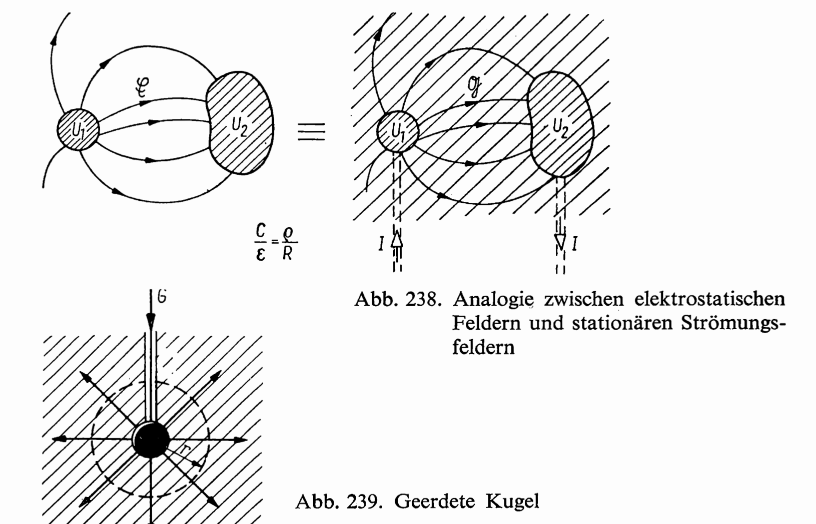


Abb. 238. Analogie zwischen elektrostatischen Feldern und stationären Strömungsfeldern

Abb. 239. Geerdete Kugel

Beispiele und Ergänzungen

1. Eine in der Erde vergrabene Kugel mit dem Halbmesser r_0 besitze ein Potential U_0, bezogen auf das Potential des unendlich fernen Punktes (Abb. 239). Wenn das Erdreich homogen und isotrop ist, wird die Stromdichte auf der

Oberfläche der Kugel sowie auf allen Kugelflächen, die mit dieser konzentrisch sind, homogen sein. Die Stromdichte auf einer solchen konzentrischen Kugel mit dem Halbmesser r ist bei einem Gesamtstrom I

$$G = \frac{I}{A} = \frac{I}{4r^2\pi}.$$

Die Feldstärke ist

$$E = \frac{G}{\gamma} = \frac{I}{4r^2\pi\gamma},$$

wobei γ die spezifische Leitfähigkeit der Erde bedeutet.

Die Spannung zwischen dieser Kugelfläche und der geerdeten Kugel beträgt

$$U = \int_{r_0}^{r} E\,dr = \frac{I}{4\pi\gamma}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2} = \frac{I}{4\pi\gamma}\left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right] = \frac{I}{4\pi\gamma r_0}\left[1 - \frac{r_0}{r}\right].$$

Für $r \to \infty$, $U \to U_0$ (Potential der Kugel) gilt

$$U_0 = \frac{I}{4\pi\gamma r_0}.$$

$R = \dfrac{U_0}{I} = \dfrac{1}{4\pi\gamma r_0}$ nennt man den Übergangswiderstand oder Erdungswiderstand der Kugel.

Somit ist die Spannung

$$U = U_0\left[1 - \frac{r_0}{r}\right].$$

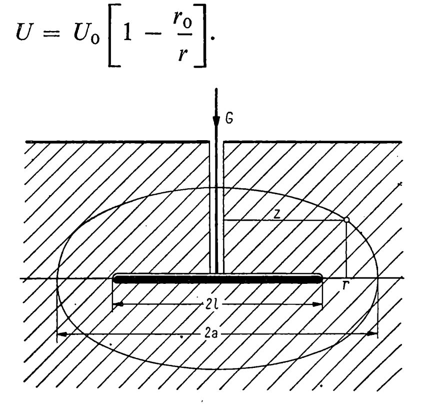


Abb. 240. Feld einer Linienquelle

2. Das Feld einer endlich langen und geraden Stromquelle, die in ein homogenes und isotropes Medium, d. h. sehr tief in die Erde gebracht wurde, kann

man bestimmen, indem man sie in punktförmig zu betrachtende Elemente der Länge $d\zeta$ aufteilt (Punktquellen). Durch Überlagerung der Felder dieser Quellen erhalten wir das Feld einer Linienquelle (Abb. 240). Die Berechnung erfolgt nach dem Muster der Bestimmung des Feldes linearer Ladungsverteilungen.

Das Potential ist

$$U = \frac{I}{8\pi\gamma l} \ln \frac{z + l + \sqrt{(z+l)^2 + r^2}}{z - l + \sqrt{(z-l)^2 + r^2}} = \frac{I}{8\pi\gamma l} \ln \frac{a+l}{a-l}.$$

Die Äquipotentialflächen sind konfokale Rotationsellipsoide. Die Brennpunkte sind die Endpunkte der Linie. Die Strömungslinien sind zu diesen Ellipsoiden orthogonale (darum mit ihnen konfokale) Haupthyperbeln eines zweimanteligen Rotationshyperboloids. Die kleine Achse der Ellipse ist $b = \sqrt{a^2 - l^2}$.

Ist $b \ll a$, so daß $a \approx l$ wird, so kann das Ellipsoid durch einen Zylinder mit abgerundeten Enden angenähert werden. Umgekehrt kann man auf diese Weise das Feld von Zylindern mit abgerundeten Enden behandeln.

Falls in den Ausdruck des Potentials $r = b$, $z = 0$ eingesetzt wird, erhält man

$$U_0 = \frac{I}{8\pi\gamma l} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + b^2}}{-l + \sqrt{l^2 + b^2}}$$

$$\approx \frac{I}{8\pi\gamma l} \ln \frac{2l}{\frac{1}{2} l \left(\frac{b}{l}\right)^2} \approx \frac{I}{4\pi\gamma l} \ln \frac{2l}{b}.$$

Bei der Näherung wurde in Betracht gezogen, daß $b \ll l$ ist, weshalb

$$\sqrt{1 + \left(\frac{b}{l}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{l}\right)^2$$

gesetzt werden kann.

Der Erdungswiderstand beträgt

$$R = \frac{U_0}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma l} \ln \frac{2l}{b}.$$

3. Ein Zylinder mit dem Durchmesser $d = 4$ cm und der Länge $l = 1$ m sei in die Erde versenkt (Abb. 241). Die Leitfähigkeit der Erde beträgt $\gamma = 10^{-2}\,\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$. Das Feld stimmt näherungsweise mit dem Feld im 2. Beispiel überein, wenn man dieses Feld längs der Symmetrieebene $z = 0$ teilt.

Der Übergangswiderstand ist das Doppelte des dort berechneten, weil derselbe Strom nur durch die Hälfte der Oberfläche fließt:

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma l} \ln \frac{2l}{b} = \frac{10^2}{2\pi \cdot 1} \ln \frac{200}{2} = 73{,}3\ \Omega.$$

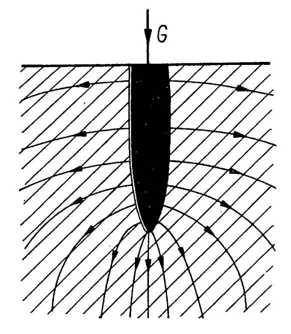


Abb. 241. Feld eines geerdeten Zylinders

Der tatsächliche Widerstand ist etwas kleiner, weil der mittlere Durchmesser des Ellipsoids etwas kleiner als d ist, und zwar $0{,}785\, d$.

Auf der Oberfläche der Erde kann die Verteilung des Potentials auf Grund des 2. Beispiels nach Einsetzen von $z = 0$ berechnet werden. Weil der gleiche Strom auch hier bei halber Länge auftritt, muß man auch diesmal den doppelten Wert nehmen:

$$U = \frac{I}{4\pi\gamma l} \ln \frac{\sqrt{r^2 + l^2} + l}{\sqrt{r^2 + l^2} - l}.$$

Mit

$$U_0 = \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln \frac{2l}{b}$$

wird

$$U = \frac{U_0}{2 \ln \frac{2l}{b}} \ln \frac{\sqrt{r^2 + l^2} + }{\sqrt{r^2 + l^2} - l}.$$

Bei sehr großer Entfernung ($r \gg l$) wird

$$\ln \frac{\sqrt{r^2 + l^2} + l}{\sqrt{r^2 + l^2} - l} \approx \ln \frac{r + l}{r - l} \approx \ln \left(1 + \frac{l}{r}\right)\left(1 + \frac{l}{r}\right) \approx \frac{2l}{r}$$

und

$$U \approx \frac{I}{2\pi\gamma r},$$

d. h., die Potentialverteilung geht in das Feld der geerdeten Halbkugel über.

4. Das Medium des in Abb. 242 dargestellten Flüssigkeitswiderstandes besitze eine spezifische Leitfähigkeit $\gamma = 5\ \Omega^{-1}\ \text{m}^{-1}$ ($\varrho = 2 \cdot 10^5\,\Omega\ \text{mm}^2/\text{m}$). Die Länge des metallenen Zylinders ist $l = 0{,}4$ m, die Radien sind $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 10$ cm. Wie groß ist sein Widerstand?

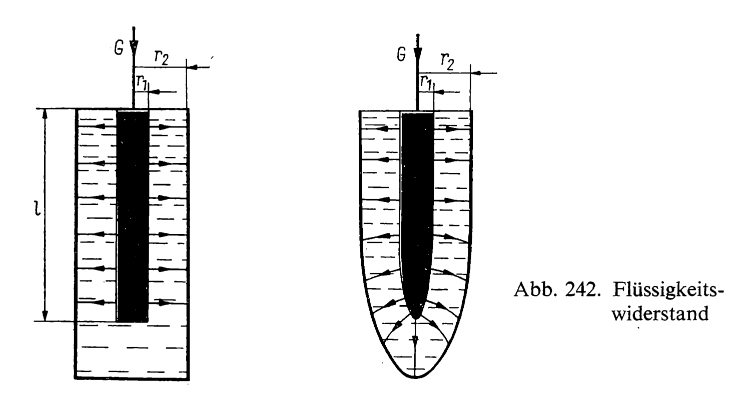


Abb. 242. Flüssigkeitswiderstand

In erster Näherung kann das Feld als zylindrisch angenommen werden. Der Widerstand wäre demnach

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma l} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 5 \cdot 0{,}4} \ln \frac{10}{3} = 0{,}0955\ \Omega.$$

Wir bekommen eine bessere Näherung, wenn die Zylinder durch Ellipsoide ersetzt werden. In diesem Fall ist auf Grund des 2. Beispiels

$$U = U_1 - U_2 = \frac{I}{4\pi\gamma l}\left[\ln \frac{\sqrt{r_1^2 + l^2} + l}{\sqrt{r_1^2 + l^2} - l} - \ln \frac{\sqrt{r_2^2 + l^2} + l}{\sqrt{r_2^2 + l^2} - l}\right]$$

$$= \frac{I}{4\pi\gamma l} \ln \frac{\sqrt{r_1^2 + l^2} + l}{\sqrt{r_1^2 + l^2} - l}\, \frac{\sqrt{r_2^2 + l^2} - l}{\sqrt{r_2^2 + l^2} + l}.$$

Der Isolationswiderstand ist

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma l} \ln \frac{\sqrt{r_1^2 + l^2} + l}{\sqrt{r_1^2 + l^2} - l}\, \frac{\sqrt{r_2^2 + l^2} - l}{\sqrt{r_2^2 + l^2} + l}.$$

Wenn $l \gg r$ ist, wird in erster Näherung

$$\sqrt{r^2 + l^2} \approx l\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2\right]$$

und der Widerstand

$$R = \frac{1}{2\pi \gamma l} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

wodurch wir den Isolationswiderstand eines *zylindrischen* Strömungsfeldes erhalten. Aus dem genauen Zusammenhang gewinnt man

$$R = \frac{1}{4\pi \cdot 5 \cdot 0{,}4} \ln \frac{\sqrt{9 + 1600} + 40}{\sqrt{9 + 1600} - 40} \frac{\sqrt{100 + 1600} - 40}{\sqrt{100 + 1600} + 40} = 0{,}0943\Omega.$$

Wie wir sehen, ist der Unterschied zur ersten Näherung unbedeutend. Bei der zweiten Berechnung wurde vorausgesetzt, daß der äußere Zylinder durch ein Ellipsoid mit der großen Achse

$$a = \sqrt{l^2 + r_2^2} = \sqrt{1600 + 100} = 41{,}23 \text{ cm}$$

ersetzt werden kann. Wenn der äußere Zylinder viel tiefer ist, ist die erste Näherung besser.

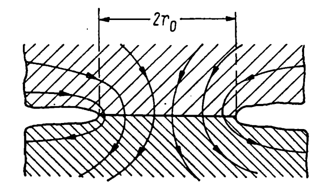


Abb. 243. Durchgangswiderstand eines Kontaktes

5. Den Durchgangswiderstand eines Kontaktes, dessen Berührungsfläche z. B. eine Kreisfläche vom Halbmesser r_0 ist (Abb. 243), kann man sofort angeben. Die Kapazität einer einzeln stehenden Kreisplatte ist nach 3.10.

$$C_0 = 8\varepsilon r_0.$$

Unter der Kapazität der Berührungsfläche versteht man die auf den Halbraum, d. h. auf die sich im Unendlichen befindende Halbkugel bezogene Kapazität. Diese ist

$$C = \frac{C_0}{2} = 4\varepsilon r_0.$$

Damit wird der Übergangswiderstand

$$R = \frac{\varrho\varepsilon}{C} = \frac{\varrho\varepsilon}{4\varepsilon r_0} = \frac{\varrho}{4 r_0}.$$

6. Das erfolgreichste experimentelle Verfahren zur Bestimmung elektrostatischer Felder ist die Methode des elektrolytischen Troges. Man bringt die aus gut leitendem Metall angefertigten Elektroden, deren statisches elektrisches Feld zu bestimmen ist, in der vorgeschriebenen geometrischen Anordnung in ein Gefäß und füllt dieses mit einem Elektrolyten, der eine geringe Leitfähigkeit im Vergleich zu der der Metallelektroden besitzt. Wenn man jetzt die vorgeschriebene Spannung an die Elektroden legt, entsteht ein Strömungsfeld, das mit dem gesuchten statischen Feld identisch ist. Dieses Strömungsfeld kann auf einfache Weise – im einfachsten Fall mit einem Voltmeter – punktweise ausgemessen werden. Abb. 244 zeigt eine Kompensationsschaltung zum punktweisen Ausmessen des Feldes.

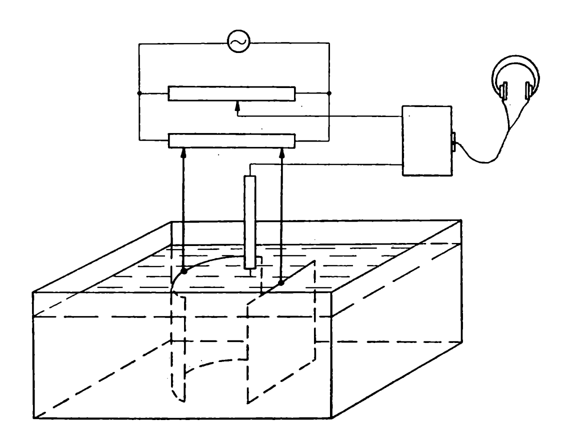


Abb. 244. Elektrolytischer Trog

7. Die Gesetzmäßigkeiten der Strom- und Potentialverteilung in räumlichen Leitern werden in der Geophysik beim Aufsuchen von Lagerstätten angewendet. Man schickt durch zwei Elektroden einen Strom in die Erde und mißt dann die Verteilung der Äquipotentiallinien auf der Erdoberfläche. Bei einem homogenen Erdreich (Abb. 245a) erhält man die Verteilung

$$U = \frac{I}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right),$$

wie man leicht mit Hilfe des 1. Beispiels nachprüfen kann.

Diese Normalverteilung wird durch Inhomogenitäten gestört (Abb. 245b). Aus den Abweichungen von der Normalverteilung können gewisse Schlüsse auf die Beschaffenheit des Erdreichs gezogen werden.

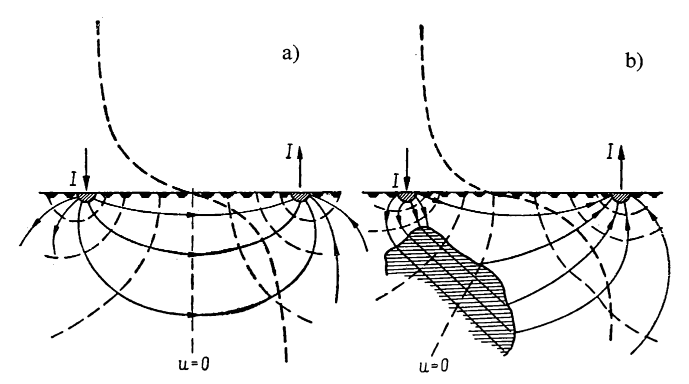


Abb. 245. Strom- und Potentialverteilung hängen von der Beschaffenheit des Bodens ab

8. Im Innern eines unendlich großen Metallstückes mit der homogenen Leitfähigkeit γ existiere zur Zeit $t = t_0$ eine Ladungsverteilung $\varrho = \varrho(x, y, z, t_0) = \varrho_0(x, y, z)$. Was geschieht mit dieser Ladung?

Die Ladung erzeugt ein elektrisches Feld, das die Ladungen in Bewegung setzt. Es entsteht demnach eine Ladungsströmung. Dadurch ändert sich die Ladungsverteilung, und die Ladungsdichte wird zu einer Funktion der Zeit:

$$\varrho = \varrho(x, y, z, t).$$

Diese Funktion soll bestimmt werden. Von der Ladung her wird das Feld durch

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho(x, y, z, t) \tag{5.3.3}$$

bestimmt. Das Feld erzeugt auf Grund der Gleichung $\mathfrak{G} = \gamma \mathfrak{E}$ den Strom. Zwischen Strom und Ladungsdichte besteht die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{G} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \tag{5.3.4}$$

Es ist eine schwierige Frage, welcher Zusammenhang im Metallinnern zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ besteht. Man wird sich jedoch nicht um Größenordnungen irren, wenn man die für das Vakuum gültige Beziehung $\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}$ verwendet. Damit erhält man aus (5.3.3) und (5.3.4) die Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\varrho(x, y, z, t)}{\varepsilon_0}$$

und

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

und folglich für ϱ die Differentialgleichung

$$\varrho(x, y, z, t) = -\frac{\varepsilon_0}{\gamma} \frac{\partial \varrho}{\partial t}.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\varrho(x, y, z, t) = \varrho_0(x, y, z)\, e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon_0}(t - t_0)}.$$

Die ursprüngliche Ladungsdichte sinkt demnach mit der Zeit exponentiell ab. Setzt man für ε_0 und γ Zahlenwerte ein, so findet man, daß die Ladungsdichte schon nach 10^{-15} s auf einige Prozent ihres Anfangswertes gefallen ist. Man kann daher mit Recht sagen, daß im Innern eines Metalls keine räumlich diskrete Ladungsdichte bestehen kann oder genauer, daß sie nur eine sehr kurze Zeit lang bestehen kann.

9. Wenn in einem homogenen Stoff mit endlich großen Werten ε und γ zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Ladungsdichte $\varrho = \varrho_0(x, y, z)$ erzeugt wird, so nimmt diese gemäß

$$\varrho(x, y, z, t) = \varrho_0(x, y, z)\, e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon} t}$$

ab. Dies bedeutet, daß überall dort, wo am Anfang keine Ladungsdichte war, auch später keine bestehen wird. Wenn anfangs eine Ladung Q im Innern einer Kugel mit dem Halbmesser a vorhanden war, so wird eine Ladung auch bis zum Ende des Vorganges nur innerhalb dieser Kugel bestehen. Hier besteht ein grundlegender Unterschied zu den sonst sehr ähnlichen Gesetzmäßigkeiten der Wärme- oder der Flüssigkeitsströmung.

Das von der Ladung erzeugte Feld bringt nämlich seinerseits eine quellenfreie Stromdichte hervor, so daß die Elektronen den geladenen Raumteil verlassen, ohne sich irgendwo anzuhäufen. Dadurch kann keine Ladungsdichte entstehen.

Bei der Flüssigkeitsströmung kann diese Erscheinung deshalb nicht auftreten, weil in der Flüssigkeit ähnliche Teilchen wie die in den Metallen existierenden Elektronen fehlen, die eine quellenfreie Strömung hervorbringen könnten.

Die Feldstärke, die durch eine Ladung Q erzeugt wird, ist in der Entfernung r von ihrem Mittelpunkt

$$E = \frac{Q}{4\pi\, \varepsilon} \frac{1}{r^2}.$$

Die Stromdichte beträgt dann

$$G = \gamma E = \frac{\gamma Q}{4\pi\, \varepsilon} \frac{1}{r^2} = \frac{\gamma Q_0}{4\pi\, \varepsilon} \frac{1}{r^2}\, e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon} t}.$$

Die durch eine Kugelfläche mit dem Halbmesser R abfließende Gesamtladung ist

$$Q = \int_0^\infty \oint_A G\, dA\, dt = \int_0^\infty \frac{\gamma Q_0}{4\pi\,\varepsilon} \frac{1}{R^2} \cdot 4R^2\, \pi e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t} d$$

$$= Q_0 \frac{\gamma}{\varepsilon} \left[-\frac{\varepsilon}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t} \right]_0^\infty = Q_0 .$$

Das ergibt tatsächlich, daß durch jede geschlossene Fläche im Laufe der Zeit die gesamte Ladung hindurchfließt.

5.4. Allgemeine Eigenschaften der Stromquellen

Eine Strömung entsteht nicht notwendig durch die Wirkung eines elektrischen Feldes. Im Innern einer Stromquelle z. B. wird der Strom von einer vom Standpunkt der Elektrizität aus ganz fremden, durch elektrische Begriffe nicht erklärbaren Kraft erzeugt. Es ist naheliegend, diese ladungsbewegende Kraft wenigstens formell durch einen elektrischen Begriff zu erfassen und speziell den durch sie erzeugten Strom einer fiktiven Feldstärke zuzuschreiben.

Wir untersuchen zunächst, wodurch ganz allgemein eine Spannungsdifferenz zwischen den beiden Klemmen einer Stromquelle entsteht. Stellen wir uns vor, daß der Experimentator zwischen den beiden Platten eines Kondensators steht und auf irgendeine Art – am einfachsten, wenn schon irgendein Kraftfeld zwischen den Platten besteht – durch Influenz und darauffolgend mit mechanischer Kraft die elektrischen Ladungen trennt und anschließend die positiven Ladungen der einen Platte und die negativen der anderen Platte übergibt. Wenn er diese Arbeit ständig leistet, wächst auch ständig die Spannung zwischen beiden Platten. Falls jetzt der Stromkreis außen geschlossen wird, fließt dort ein Strom infolge der Wirkung des elektrostatischen Feldes der Kondensatorplatten. Im Außenkreis gilt also

$$\mathfrak{E} = \varrho \mathfrak{G} .$$

Gleichzeitig fließt aber zwischen den Platten des Kondensators ein Strom *gegen* das elektrostatische Feld, und zwar vermöge und zu Lasten der Arbeitsleistung des Experimentators. Wir stellen also fest, daß im Innern der Stromquelle irgendein ladungstrennender Mechanismus wirken muß. Diese sog. „elektromotorische Kraft“, „innere Spannung“ oder Urspannung der Stromquelle kann durch das elektrostatische Potential charakterisiert werden, auf das sie die Klemmen der Stromquelle aufzuladen imstande ist. Die innere Spannung hängt im allgemeinen auch davon ab, wieviel Strom der Stromquelle entnommen

wird. Um von diesen Einflüssen unabhängig zu sein, pflegt man die ladungstrennende Fähigkeit einer Stromquelle durch dasjenige elektrostatische Potential zu charakterisieren, auf das sich die Klemmen der Batterie aufladen, wenn überhaupt kein Strom entnommen wird.

Bei vielen Stromquellen ist aber die innere Spannung so sehr belastungsabhängig, daß zur Charakterisierung der Stromquelle auch ihre Kennlinie angegeben werden muß.

Praktisch ist die ladungstrennende Wirkung in vielen Fällen über größere Volumina kontinuierlich verteilt, wie z. B. in einem galvanischen Element, wo die Trennung der Ladungen durch Umwandlung chemischer Energie vor sich geht. In solchen Fällen kann sich die Größe der elektromotorischen Kraft von Ort zu Ort ändern. Deshalb ist es für quantitative Erörterungen zweckmäßig, statt innerer und äußerer Spannung den Begriff der „inneren Feldstärke" oder „eingeprägten Feldstärke" durch folgende Definition einzuführen:

$$\mathfrak{G} = \gamma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_i).$$

Diese bedeutet, daß die Stromdichte durch die innere Feldstärke und die elektrische Feldstärke gemeinsam erzeugt wird.

Abb. 246 zeigt die Verhältnisse in einem Element. Durch Kräfte, die an der Grenzfläche Metall—Elektrolyt wirken, wird die eine Elektrode positiv, die

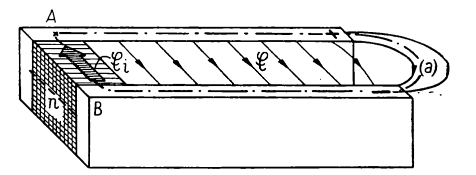


Abb. 246. Stromquelle in unbelastetem Zustand

andere negativ aufgeladen. Die zwischen beiden liegende Spannung wird dadurch bestimmt, daß das entstandene elektrische Feld die ladungstrennende Kraft daran hindert, weitere Ladungen an die Elektroden zu schaffen. Der Abbildung entnimmt man, daß der Wert der Spannung

$$U_A - U_B = (a)\int_{AB} \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = (n)\int_{AB} \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l}$$

unabhängig vom Weg ist, über den das Integral erstreckt wird.

Dieses elektrostatische Feld wird natürlich auch dann bestehen, wenn man die Platten in den Elektrolyten bringt. Da zwischen offenen Klemmen kein Strom fließt, der Elektrolyt aber ein Leiter ist, muß gegen das elektrostatische Feld $\mathfrak{E}$ ein inneres Feld $\mathfrak{E}_i$ wirken, so daß

$$\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_i = 0 \quad \text{oder} \quad -\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_i \tag{5.4.1}$$

ist. Wenn man jetzt beide Seiten von (5.4.1) integriert, erhält man

$$- U_{AB} = U_{iAB},$$

was so viel bedeutet, daß die an den Klemmen gemessene elektrostatische Spannung tatsächlich ein Maß für die innere Spannung ist.

Wenn der Batterie ein Strom entnommen wird (Abb. 247), sinkt das gegen das innere Feld wirkende elektrostatische Feld ein wenig. Dadurch kann das innere Feld ständig die notwendige Ladung an die Elektroden liefern.

Integriert man die Beziehung

$$\varrho\mathfrak{S} = (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_i)$$

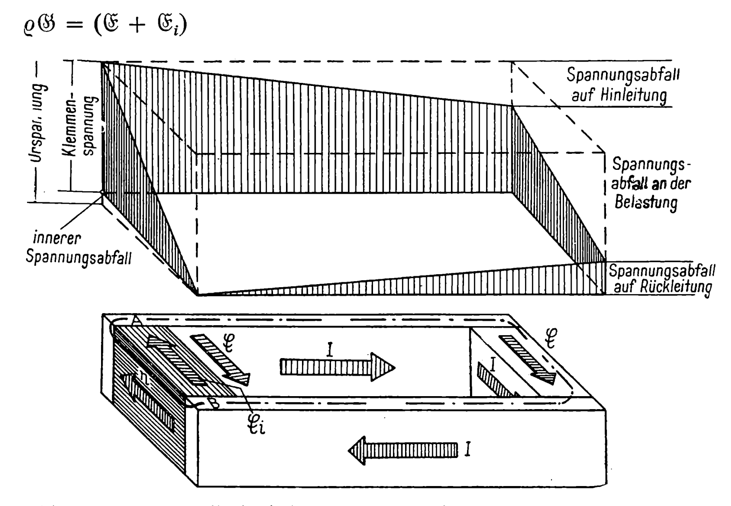


Abb. 247. Stromquelle in belastetem Zustand

längs der geschlossenen Kurve $AaBnA$, so erhält man

$$(a)\int_A^B \varrho\mathfrak{S}\, d\mathfrak{l} + (n)\int_B^A \varrho\mathfrak{S}\, d\mathfrak{l} = \oint_L \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} + \oint_L \mathfrak{E}_i\, d\mathfrak{l}.$$

Das erste Glied der linken Seite ergibt den Spannungsabfall IR_a, das zweite Glied den inneren Spannungsabfall IR_i. Das Integral des elektrostatischen Feldes entlang einer geschlossenen Kurve ist gleich Null, das Integral des inneren Feldes ergibt die innere Spannung. Somit ist unsere Gleichung

$$U_i = IR_i + IR_a$$

oder

$$U_i - IR_i = IR_a = U_a. \tag{5.4.2}$$

Die Spannung $U_i - IR_i = U_a$, die zur Erzeugung des Spannungsabfalls IR_a zur Verfügung steht, wird Klemmenspannung genannt.

Beispiele und Ergänzungen

1. Nach Gleichung (5.4.2) hängt die Spannung in einem aus einer Stromquelle und einem Verbraucher bestehenden Stromkreis von der Belastung ab. Wenn die Stromquelle Energie abgibt, ist

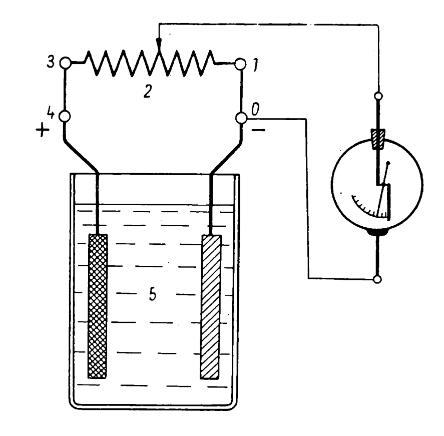
$$U_a < U_i.$$

Im Leerlauf fließt kein Strom ($I = 0$), und die Leerlaufspannung ist

$$U_0 = U_i.$$

Die innere Spannung kann dann mit einem elektrostatischen Spannungsmesser gemessen werden. Wird jedoch ein Strom entnommen, so muß der Wert von U_i bei jeder Belastung nach Gleichung (5.4.2) aus der gemessenen Klemmenspannung und der Stromstärke bei bekanntem innerem Widerstand berechnet werden.

2. Mit einem elektrostatischen Voltmeter soll die Spannung zwischen den verschiedenen Punkten des Stromkreises eines galvanischen Elementes gemessen werden (Abb. 248).



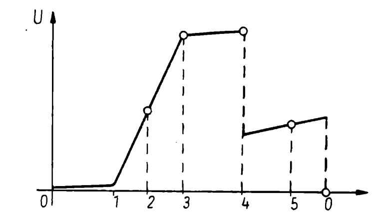


Abb. 248. Spannungsverteilung in einem einfachen Kreis

An den Abschnitten $0-1$ und $3-4$ treten nur die verhältnismäßig geringen ohmschen Spannungsabfälle der Leitung auf. Längs des Abschnittes $1-3$ erscheint die große Spannungsänderung am Verbraucher. An den Oberflächen der Elektroden bestehen Potentialsprünge, während im Innern des Elektrolyten wegen seines kleinen Widerstandes nur ein kleiner Spannungsabfall auftritt.

3. Nunmehr sind wir bereits in der Lage, die KIRCHHOFFschen Grundgleichungen der Netzwerke abzuleiten.

Das erste KIRCHHOFFsche Gesetz lautet: *Die Summe aller Ströme, die durch einen Knotenpunkt hindurchgehen, ist Null.* Dabei nimmt man die abfließenden Ströme als positiv, die zufließenden als negativ an.

Dieser Satz ist eine einfache Folgerung der Gleichungen

$$\int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A} = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{div} \mathfrak{G} = 0.$$

Wenn nämlich die geschlossene Fläche A den Knotenpunkt umhüllt, so ergibt der Ausdruck

$$\int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A}$$

gerade die Summe der zu- und abfließenden Ströme mit dem richtigen Vorzeichen, wenn die nach außen zeigende Normale als positiv gewählt wird. Es wird also in der Tat

$$\sum I = 0.$$

Das zweite KIRCHHOFFsche Gesetz besagt: *Nimmt man in einem allgemeinen Netzwerk einen beliebigen geschlossenen Kreis, so ist die Summe der Spannungen gleich Null.* Dabei wählt man in den Generatoren die Richtung von der positiven Klemme zur negativen als positiv. Die Meßrichtungen der unbekannten Ströme werden beliebig angenommen. Die Spannungen

$$U_R = IR, \quad U_L = L\frac{dI}{dt}, \quad U_C = \frac{1}{C}\int I\, dt$$

sollen eine Meßrichtung besitzen, die der Meßrichtung der entsprechenden Ströme entspricht. Die Umlaufrichtung kann beliebig angenommen werden. In der Beziehung $\sum U = 0$ sind dann die Spannungen, deren Richtung mit der Umlaufrichtung zusammenfällt, mit positivem Vorzeichen einzusetzen, die übrigen mit negativem Vorzeichen.

Der Beweis des zweiten KIRCHHOFFschen Gesetzes beruht auf den Grundgleichungen

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}, \quad \mathfrak{G} = \gamma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_i).$$

Integrieren wir die erste dieser Gleichungen über die Fläche, welche von dem betrachteten Stromkreis aufgespannt wird, so erhalten wir mit Hilfe des STOKESschen Satzes

$$\oint_L \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Aus der Gleichung $\mathfrak{G} = \gamma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_i)$ ergibt sich im Innern der Leitungen und in den Generatoren $\mathfrak{E} = \varrho\mathfrak{G} - \mathfrak{E}_i$, in Kondensatoren $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_C$. Damit wird

$$\oint_L \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = \int_{\text{Leit. + Gen.}} \varrho\mathfrak{G}\, d\mathfrak{l} - \int_{\text{Gen.}} \mathfrak{E}_i\, d\mathfrak{l} + \int_{\text{Kond.}} \mathfrak{E}_C\, d\mathfrak{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Dies ist aber gleichbedeutend mit der Beziehung

$$\sum U = \sum U_G + \sum IR + \sum U_C + \sum L\frac{dI}{dt} = 0.$$

Man beachte dabei, daß sich bei unserer Ableitung auch die richtigen Vorzeichenverhältnisse ergeben haben. (Bei der Anschreibung der Generatorspannungen wurde auch die Tatsache berücksichtigt, daß die positive Meßrichtung – vom Plus- zum Minuspol – gegen E_i gerichtet ist.)

Das elektrische Feld in Anwesenheit von Isolatoren

5.5. Die Dielektrizitätskonstante

Auf Grund experimenteller Tatsachen haben wir für das Kraftfeld elektrischer Ladungen einen einfachen Zusammenhang festgestellt. Die elektrischen Kraftlinien beginnen und enden an den Ladungen, so daß die Quellendichte der Ladungsdichte proportional ($\operatorname{div}\varepsilon_0\mathfrak{E} = \operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho$) und das Kraftfeld wirbelfrei, also ein Potentialfeld ist ($\operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0$). Die Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ unterscheiden sich im ganzen Raum nur um den konstanten Faktor ε_0.

Die Verhältnisse werden komplizierter, wenn man einen Isolator in den Raum bringt. Da die Bausteine der Stoffe geladene Teilchen sind, wirkt auf sie im elektrischen Feld eine Kraft. Als Folge davon erzeugt das Dielektrikum selbst auch ein Kraftfeld, das sich dem äußeren Feld überlagert. Vom Aufbau

des Dielektrikums wie auch von der atomistischen Erklärung der Dielektrizitätskonstanten wird später noch die Rede sein. Vorerst genügt es, wenn wir wissen, daß die Dielektrika ihrem Aufbau nach in zwei große Gruppen unterteilt werden können (Abb. 249), und zwar in Stoffe, deren einzelne Moleküle nach außen elektrisch neutral sind, und in Stoffe, deren Moleküle auch im feld-

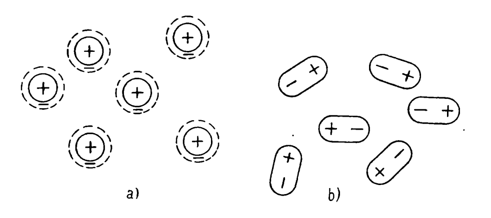


Abb. 249. Isolator im feldlosen Zustand
a) Moleküle nach außen elektrisch neutral
b) Moleküle als ungeordnete Dipole

freien Raum kleine Dipole darstellen. Werden die Dielektrika in ein elektrisches Feld gebracht, dann wirkt auf die positiven Ladungen der Moleküle eine Kraft in Richtung der Kraftlinien, auf die negativen Ladungen eine entgegengesetzt gerichtete Kraft. Die Ladungsverteilung der nach außen elektrisch neutralen Moleküle wird dabei deformiert, so daß sie in Richtung des Feldes weisende Dipole bilden. Moleküle, die von Natur Dipole sind, richten sich im äußeren Feld aus, so daß sie sämtlich ein der Feldstärke paralleles resultierendes Moment besitzen (Abb. 250). In beiden Fällen erscheinen im elektrischen

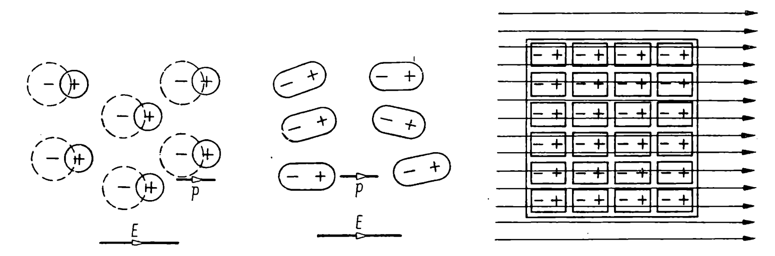


Abb. 250. Isolator in einem elektrischen Feld

Abb. 251. Polarisation

Feld an den auf den Kraftlinien senkrecht stehenden Seiten eines aus dem Dielektrikum herausgeschnittenen Volumenelementes gleichgroße Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens (Abb. 251). Diese Erscheinung heißt Polarisation.

Um die Wirkung eines Dielektrikums im elektrischen Feld beobachten zu können, betrachten wir die in Abb. 252 skizzierte Meßanordnung.

Zwischen den Platten des Kondensators befinde sich zunächst ein Vakuum. Es wird die durch die Ladungen $+Q$ und $-Q$ erzeugte Spannung gemessen.

Ihr Wert sei U_0. Wird jetzt der ganze Raum zwischen den Platten mit einem Isolator ausgefüllt, so sinkt bei gleichen Ladungen $+Q$ und $-Q$ die Spannung auf einen Wert $U_d < U_0$. Das Verhältnis

$$\frac{U_0}{U_d} = \varepsilon_r, \tag{5.5.1}$$

das stets größer als 1 ist, nennt man die relative Dielektrizitätskonstante des betreffenden Dielektrikums.

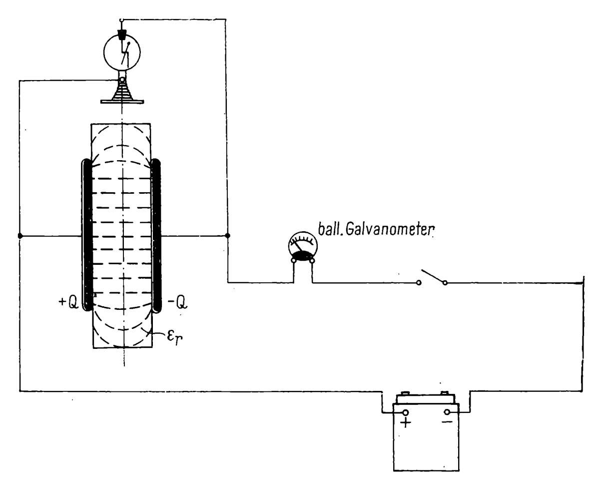


Abb. 252. Messung der Dielektrizitätskonstanten

Wenn an den Kondensator sowohl bei der Messung im Vakuum als auch bei der Messung mit Dielektrikum die gleiche Spannung gelegt wird, so ist die im Vakuum gemessene Ladung Q_0 kleiner als die mit Dielektrikum gemessene Ladung Q_d. Es ist demnach

$$\frac{Q_d}{Q_0} = \varepsilon_r, \tag{5.5.2}$$

wenn U konstant ist.

Daß man hier dasselbe Verhältnis ε_r erhält wie beim ersten Versuch, ist eine Folge davon, daß das Verhältnis Q/U im luftleeren sowie im materiegefüllten Raum jeweils für sich konstant ist und die Kapazität des Kondensators im Vakuum bzw. im Dielektrikum angibt. Aus (5.5.1) folgt

$$\varepsilon_r = \frac{U_0}{Q}\frac{Q}{U_d} = \frac{C_d}{C_0}. \tag{5.5.3}$$

Diese Gleichung ist zugleich eine Anweisung zur praktischen Messung der Dielektrizitätskonstanten. Mißt man die Kapazität eines Kondensators zuerst in Anwesenheit eines Isolierstoffes, dann ohne diesen, so ergibt das Verhältnis beider die relative Dielektrizitätskonstante des Stoffes.

Abb. 253 zeigt die Dielektrizitätskonstanten einiger Isolatoren.

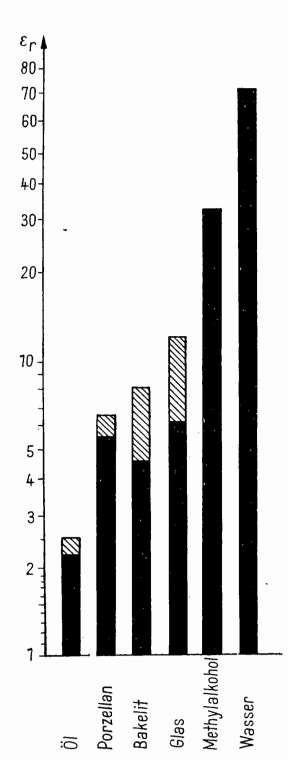


Abb. 253. Dielektrizitätskonstante einiger Isolatoren

5.6. Zusammenhang von Feldstärke und Verschiebungsvektor mit den Ladungen

Wir sahen, daß sich die Kapazität eines Kondensators erhöht, wenn zwischen seine Platten ein Dielektrikum geschoben wird. Der Kondensator trägt dann bei unveränderter Spannung eine größere Ladung. Wird dagegen die Ladung konstant gehalten, so sinkt beim Einführen eines Dielektrikums die Spannung. Diese Erscheinung wird folgendermaßen gedeutet. Es seien die Ladungen der Kondensatorplatten $+Q$ und $-Q$. Dementsprechend sind die Oberflächenladungsdichten $+\sigma$ und $-\sigma$ (Abb. 254). Der Verschiebungsvektor und die

Feldstärke ohne Dielektrikum sind

$$D = \sigma, \quad E_0 = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{5.6.1}$$

Wenn nun der Raum zwischen den Platten des Kondensators mit einem Isolator ausgefüllt wird, der eine Dielektrizitätskonstante ε_r besitzt, dann erscheinen an den beiden Stirnflächen eines beliebig ausgeschnittenen Volumenteiles im Isolator positive bzw. negative Ladungen. Während im Innern des

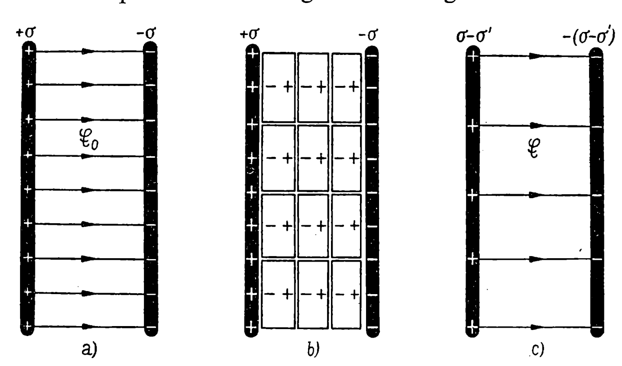


Abb. 254. a) Feldstärke und Flächendichte ohne Dielektrikum;
b) Polarisation des Dielektrikums;
c) freie Ladungsdichte und resultierende Feldstärke

Stoffes diese Ladungen sich gegenseitig aufheben, existieren sie an den beiden äußeren Seiten des Isolators als scheinbare Ladungen (Abb. 254b). Es ist verständlich, daß die Feldstärke hier kleiner ist gegenüber einem Kondensator *ohne* Dielektrikum. Entsprechend ist auch die Spannung kleiner. Für die Feldstärke gilt

$$E = \frac{U}{l} = \frac{1}{\varepsilon_r}\frac{U_0}{l} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}. \tag{5.6.2}$$

Führt man das Produkt $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ als „absolute Dielektrizitätskonstante" des Isolators und mit der Beziehung

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} \tag{5.6.3}$$

den Verschiebungsvektor ein, so sieht man, daß der Zusammenhang

$$D = \sigma \quad \text{bzw.} \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

auch jetzt besteht und daß der Vektor $\mathfrak{D}$ mit der Ladungsdichte σ, die wir auf die Metallfläche gebracht haben, in diesem bekannten einfachen Zusammenhang

steht. Es kann auch gesagt werden, daß sich $\mathfrak{D}$ bei konstanter Ladung durch das Einführen eines Isolators nicht ändert, während sich $\mathfrak{E}$ verkleinert.

Die Verminderung der Feldstärke bedeutet auch, daß sich die auf die Ladung wirkende Kraft im Verhältnis $1/\varepsilon_r$ vermindert hat. Das verallgemeinerte COULOMBsche Gesetz lautet deshalb

$$d\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi\, \varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{dQ}{r^2} \mathfrak{r}^0 = \frac{1}{4\pi\, \varepsilon} \frac{dQ}{r^2} \mathfrak{r}^0, \tag{5.6.4}$$

wenn der ganze Raum mit einem Isolator mit der Dielektrizitätskonstanten ε_r ausgefüllt ist. Der GAUSSsche Satz lautet dann

$$\oint_A \varepsilon \mathfrak{E}\, d\mathfrak{A} = \oint_A \mathfrak{D}\, d\mathfrak{A} = \int_V \varrho\, dV, \tag{5.6.5}$$

woraus wir gleichfalls zum Zusammenhang $D = \sigma$ gelangen.

Die Verminderung der Feldstärke kann anschaulich folgendermaßen erklärt werden. Es wird angenommen, daß die Untersuchungen im Vakuum erfolgen, die Feldstärke jedoch nicht von der wahren Ladungsdichte, sondern von der freien Ladung erzeugt wird, die die Resultierende aus der wahren Ladungsdichte σ und der durch Polarisation entstandenen scheinbaren Ladungsdichte σ' ist. Die Feldstärke kann daher auch geschrieben werden

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0}. \tag{5.6.6}$$

Daraus ergibt sich

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 \sigma}{\varepsilon} + \sigma'. \tag{5.6.7}$$

Diese Gleichung bestimmt den Zusammenhang zwischen der wahren Ladungsdichte σ, dem Wert ε und der durch die Polarisation entstandenen Ladungsdichte σ'. Alle vorkommenden Größen sind Skalare.

Die Gleichung (5.6.7) kann aber auch in Vektorform geschrieben werden, wenn man den sogenannten Polarisationsvektor einführt. Sein Absolutwert beträgt

$$|\mathfrak{P}| = \sigma',$$

d. h., er soll der durch die Polarisation entstandenen scheinbaren Ladungsdichte gleich sein und von der negativen Ladungsdichte $-\sigma'$ zur positiven Ladungsdichte $+\sigma'$ zeigen (Abb. 255). Damit kann dieser Polarisationsvektor als Dipol-

moment der Volumeneinheit aufgefaßt werden, da das Dipolmoment das Produkt der Ladungsgrößen und des zwischen ihnen bestehenden Abstandes ist. Hier wird der Abstand der Ladungen $-\sigma'$ und $+\sigma'$ gleich 1 gewählt, so daß die Gleichung (5.6.7) auch geschrieben werden kann

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E} + \mathfrak{P}. \tag{5.6.8}$$

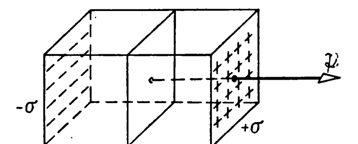


Abb. 255. Polarisationsvektor

Diese Gleichung schafft einen Zusammenhang zwischen dem Verschiebungsvektor, der Feldstärke und dem Polarisationsvektor. Für ein homogenes, isotropes Medium ist sie erfahrungsgemäß ganz allgemeingültig.

Die Größe der Polarisation hängt natürlich von der elektrischen Feldstärke ab. Je größer die resultierende Feldstärke $\mathfrak{E}$ ist, desto mehr werden die einzelnen Moleküle polarisiert und desto größer wird der Polarisationsvektor sein. Erfahrungsgemäß ist die Polarisation der Feldstärke proportional:

$$\mathfrak{P} = \varkappa \varepsilon_0 \, \mathfrak{E}.$$

In (5.6.8) eingesetzt, erhält man

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}(1 + \varkappa); \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{D}{E} = 1 + \varkappa; \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \varkappa = \varepsilon_r.$$

Den Proportionalitätsfaktor $\varkappa$ nennt man dielektrische Suszeptibilität.

Wenn ein Kondensator mit einer bestimmten Ladung versehen wird, so hängt die zwischen den Platten meßbare Feldstärke vom Dielektrikum ab, das den Raum zwischen den Platten erfüllt. Eben deshalb war es sehr zweckmäßig, den dielektrischen Verschiebungsvektor einzuführen, dessen Größe ausschließlich von den wahren Ladungen auf den Platten des Kondensators abhängt und der unabhängig von der Dielektrizitätskonstante des Isolators ist.

Dies wurde zunächst nur für den Fall eines homogenen Dielektrikums gezeigt. Es wird sich im weiteren ergeben, daß die *Gesamtzahl der* $\mathfrak{D}$*-Linien* ganz allgemein ausschließlich *von der wahren Ladung abhängt.* Das Dielektrikum beeinflußt jedoch den Verlauf der $\mathfrak{D}$-Linien, und darum muß schon im voraus darauf hingewiesen werden, daß im allgemeinen Fall die $\mathfrak{D}$*-Linien* nach Einsetzen eines Isolators *nicht unverändert* bleiben werden.

5.7. Geschichtete Kondensatoren

5.7.1. *Quergerichtete Schichtung*

Es soll nun die Verteilung der Feldstärke in einem Kondensator untersucht werden, dessen Volumen von zwei Stoffen mit verschiedener Dielektrizitätskonstante erfüllt ist (Abb. 256). Die Ladungsdichte auf den Kondensatorplatten sei $+\sigma$ und $-\sigma$ (Abb. 257). Nach Einführen der Dielektrika erscheinen

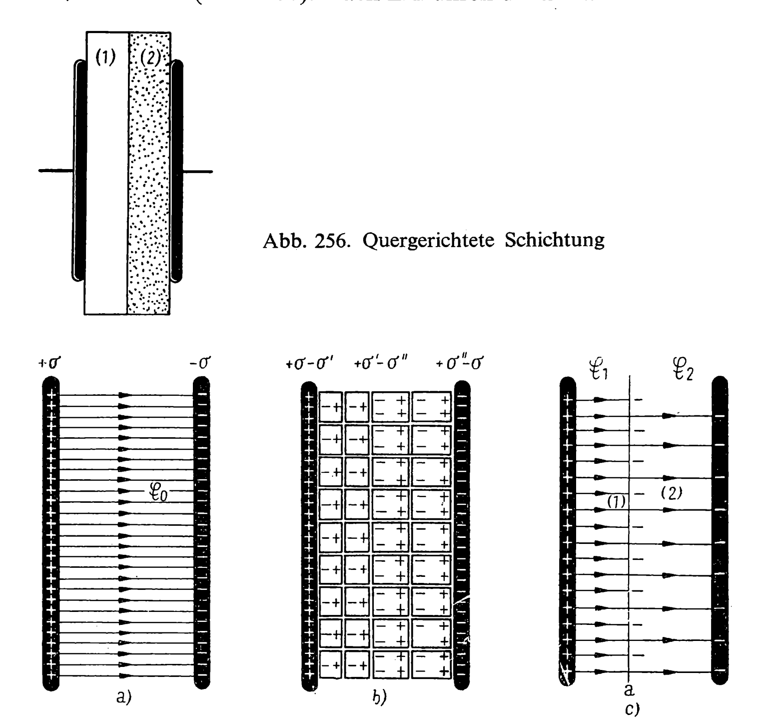


Abb. 256. Quergerichtete Schichtung

Abb. 257. Die Verhältnisse bei quergerichteter Schichtung a) vor Einführung der Isolatoren; b) Polarisation der Schichtung; c) resultierendes Feld

wegen der Polarisation die Ladungsdichten $-\sigma'$, $+\sigma'$ und $-\sigma''$, $+\sigma''$ an den Oberflächen der Dielektrika (1) und (2). Ist die Dielektrizitätskonstante des Stoffes (1) klein gegen die des Stoffes (2), dann sinkt beim Einbringen die Feldstärke in (1) viel weniger als in (2), da wegen der Polarisation größere Ladungen auf der Oberfläche von (2) erscheinen. Die Ladungsdichten $-\sigma''$, $+\sigma''$ üben nur im Dielektrikum (2), also zwischen den $-\sigma''$ und $+\sigma''$ tragenden Ebenen, eine Wirkung aus. Im Dielektrikum (1) heben sich ihre

Wirkungen gegenseitig auf. Im Dielektrikum (1) mit $\varepsilon = \varepsilon_1$ gilt daher

$$E_1 = \frac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} = \frac{D_1}{\varepsilon_1},$$

d. h.

$$\sigma = D_1 = \varepsilon_1 E_1 .$$

Im Dielektrikum (2) mit $\varepsilon = \varepsilon_2$ gilt

$$E_2 = \frac{\sigma - \sigma''}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_2} = \frac{D_2}{\varepsilon_2}$$

oder

$$\sigma = D_2 = \varepsilon_2 E_2 .$$

Insgesamt gilt also

$$\sigma = D_1 = D_2 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$$

oder

$$\left.\begin{aligned} D_1 = D_2 = D, \\ \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 . \end{aligned}\right\} \tag{5.7.1}$$

Während sich die Feldstärke an den Grenzen der Dielektrika ändert, ist D im ganzen Kondensator konstant. Der Vektor $\mathfrak{D}$ geht also kontinuierlich durch die zu ihm senkrechte Trennfläche, während sich $\mathfrak{E}$ sprunghaft ändert. Auf der einen Seite der Trennfläche gilt E_1, auf der anderen Seite $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1$. Der Vektor $\mathfrak{E}$ besitzt demnach Quellen an der Grenzfläche eines zwei verschiedene Dielektrizitätskonstanten besitzenden Isolators, wenngleich dort keine wahren Ladungen vorhanden sind. Die Spannung zwischen beiden Platten ist demnach

$$U = l_1 E_1 + l_2 E_2 = l_1 \frac{D}{\varepsilon_1} + l_2 \frac{D}{\varepsilon_2} = l_1 \frac{\sigma}{\varepsilon_1} + l_2 \frac{\sigma}{\varepsilon_2}$$

oder, wenn wir dies mit Hilfe der Ladung ausdrücken,

$$U = \frac{Q}{A}\left[\frac{l_1}{\varepsilon_1} + \frac{l_2}{\varepsilon_2}\right]. \tag{5.7.2}$$

Die Kapazität beträgt

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{\dfrac{l_1}{A\varepsilon_1} + \dfrac{l_2}{A\varepsilon_2}}. \tag{5.7.3}$$

Aus (5.7.3) ersieht man, daß die Kapazität dieses geschichteten Kondensators so berechnet werden kann, als ob zwischen den Grenzflächen der beiden Dielektrika eine Metallplatte liegt und die so entstandenen beiden Kondensatoren in Reihe geschaltet sind. In diesem Sinne sieht man auch, daß über der Schicht mit der größeren Dielektrizitätskonstanten die kleinere Spannung abfällt, weil die Kapazität dieses Teilkondensators größer ist als die des Teilkondensators mit der kleineren Dielektrizitätskonstanten, wenn gleiche Schichtdicke beider Dielektrika vorausgesetzt wird.

Betrachten wir als Beispiel einen Plattenkondensator mit einem Plattenabstand von 1 cm. Die anliegende Spannung betrage 24 kV. Wird die Hälfte des Abstandes mit Glas ($\varepsilon_r = 5$) ausgefüllt, so wird das Verhältnis der Teilspannungen in Luft und Glas

$$\frac{U_l}{U_g} = \frac{5}{1}.$$

Da $U_l + U_g = 24$ kV ist, entfallen auf den Bereich in Luft

$$U_l = 20\,\text{kV},$$

und die Feldstärke wird

$$E_l = \frac{20\,\text{kV}}{0{,}5\,\text{cm}} = 40\,\frac{\text{kV}}{\text{cm}}.$$

Dies bedeutet, daß beim Einführen der Glasplatte die Feldstärke in der Luft derart erhöht wird, daß der Kondensator mit Sicherheit durchschlägt.

Wir berechnen noch die scheinbaren und die freien Ladungen. Es gilt

$$\sigma_1^s = \sigma' = \sigma\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right),$$

$$\sigma_2^s = \sigma'' = \sigma\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right),$$

$$\sigma_1^f = \sigma - \sigma' = \frac{\varepsilon_0 \sigma}{\varepsilon_1},$$

$$\sigma_2^f = \sigma - \sigma'' = \frac{\varepsilon_0 \sigma}{\varepsilon_2},$$

$$\sigma_{1-2}^s = \sigma_{1-2}^f = \sigma' - \sigma'' = \sigma\varepsilon_0\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right). \qquad (5.7.4)$$

Wenn man zwischen den Platten eines Kondensators dünne Schichten verschiedener Dielektrika anordnet, deren Dielektrizitätskonstanten, von der positiven Platte beginnend, ständig anwachsen (Abb. 258), dann ist die Ladungsdichte auf einer beliebigen Trennfläche (a) zweier Dielektrika (1) und (2) nach Gleichung (5.7.4)

$$\sigma^s_{(a)} = \sigma\varepsilon_0 \left(\frac{1}{\varepsilon + d\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\right) \approx -\sigma\varepsilon_0 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}, \tag{5.7.5}$$

wobei σ die wahre Ladung der Kondensatorplatte ist. Die Feldstärke fällt ständig, ebenso das Potential (Abb. 259). Sind die Schichten sehr dünn und

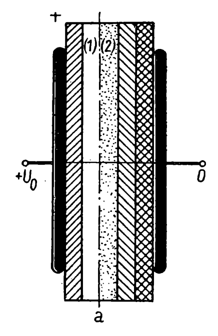


Abb. 258. Mehrschichtiger Kondensator

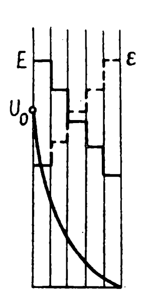


Abb. 259. Dielektrizitätskonstante, Feldstärke und Potential bei einem geschichteten Kondensator

unterscheiden sich die Dielektrizitätskonstanten benachbarter Schichten stets nur sehr wenig, so erscheinen im Raum praktisch kontinuierlich verteilte scheinbare Ladungen. Man hat damit einen Kondensator mit Raumladung, ähnlich wie er in Abschnitt 3.10.8 behandelt wurde. Die Größe der Raumladung finden wir leicht mit Hilfe der Gleichung (5.7.5), die wir in folgender Form schreiben können:

$$\frac{\sigma^s}{\varepsilon_0 dl} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dl}, \tag{5.7.6}$$

wobei dl die Dicke einer Schicht bedeutet.

σ^s/ε_0 ist die Ladung eines Volumens mit der Grundfläche 1 und der Höhe dl. Die im Einheitsvolumen befindliche Ladung σ^s/dl ist das ε_0-fache der Divergenz von E:

$$\frac{\sigma^s}{\varepsilon_0\, dl} = \operatorname{div} \mathfrak{E}. \tag{5.7.7}$$

Da ferner

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$$

gilt, lautet die Gleichung (5.7.6) in Vektorform

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = -\frac{\mathfrak{E}}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varepsilon. \tag{5.7.8}$$

Überall dort, wo keine wahren Ladungen vorhanden sind, besitzt der Feldstärkevektor $\mathfrak{E}$ Quellen, wo eine Änderung der Dielektrizitätskonstanten auftritt. Gleichung (5.7.8) kann auch geschrieben werden

$$\varepsilon \operatorname{div} \mathfrak{E} + \mathfrak{E} \operatorname{grad} \varepsilon = 0 \tag{5.7.9}$$

oder

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathfrak{E}) = \operatorname{div} \mathfrak{D} = 0.$$

Im homogenen Feld, wo keine wahren Ladungen existieren, ist also

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0,$$

während in den Raumgebieten, in denen wahre Ladungen vorhanden sind,

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho$$

bzw. auf einer Metallfläche

$$D = \sigma$$

ist.

Die letzten Gleichungen wurden ganz allgemein formuliert, obwohl nur senkrecht zu den Kraftlinien geschichtete Dielektrika behandelt wurden. Später wird man noch sehen, daß auch bei einer Schichtung parallel zu den Kraftlinien im Feld, in dem keine wahren Ladungen vorhanden sind, $\mathfrak{D}$ keine Divergenz besitzt.

Die Ausdrücke „wahre", „scheinbare" und „freie" Ladung sind nicht dem eigentlichen Sinne dieser Wörter nach zu verstehen, weil die „scheinbaren" Ladungen genauso echte Ladungen sind wie jede beliebigen anderen. „Wahre" Ladung ist jene, welche als Mehrladung auf einen Metalleiter oder auf die Oberfläche bzw. das Innere eines Isolators von außen gebracht wurde. „Scheinbare" Ladungen sind jene, welche durch die Polarisation des Isolators erscheinen, bei homogenen Isolatoren an der Oberfläche als Flächenladung, bei inhomogenen Isolatoren im Innern als Raumladungsdichte. Da diese durch Verschiebung oder Ordnen der Ladungen eines ursprünglich neutralen

Isolators entstanden sind, müssen sie, über den ganzen Isolator summiert, als Resultat Null ergeben. Endlich sind „freie" Ladungen jene, welche als Resultierende der wahren und scheinbaren Ladungen zur Erzeugung der elektrischen Feldstärke E „frei" bleiben.

5.7.2. *Längsgerichtete Schichtung*

Es soll das Dielektrikum eines Kondensators auf der in Abb. 260 ersichtlichen Weise parallel zu den Kraftlinien geschichtet und die Ladung $+Q$ auf die eine und $-Q$ auf die andere Platte gebracht werden. Die Frage ist, ob sich

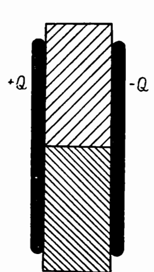


Abb. 260. Längsgerichtete Schichtung

die Ladung gleichmäßig auf der gegenüberstehenden Oberfläche der Platten verteilt, wie sie es im Fall eines homogenen Dielektrikums, z. B. Luft, getan hatte. Im letztgenannten Fall verteilt sich die Ladung auf einer großen Platte gleichmäßig, weil dies der Gleichgewichtszustand ist, d. h., bei einer beliebigen anderen Verteilung der Ladungen würde die Feldstärke eine in Richtung der Oberfläche fallende Komponente besitzen, und diese würde die Ladungen verschieben. Im inhomogenen Fall ist es die „freie" Ladung, welche eine Kraftwirkung erzeugen würde. Diese muß also im Gleichgewichtszustand über die ganze Oberfläche gleichmäßig verteilt sein:

$$\sigma_f^{(1)} = \sigma_f^{(2)},$$

was durch Anwendung des GAUSSschen Satzes zur Beziehung

$$E_1 = E_2$$

führt. Die Feldstärke ist daher in beiden Dielektrika gleich.

Dies versteht sich natürlich von selbst. Zwischen beiden Platten herrscht eine bestimmte Spannung, demnach ist die auf die Längeneinheit fallende Spannung, d. h. die Feldstärke, in beiden Dielektrika gleich.

Wenn man voraussetzt, daß das Feld $\mathfrak{E}$ ein Potentialfeld ist, so folgt für diese Anordnung unbedingt $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2$. Umgekehrt wird man folgern, daß $\mathfrak{E}$ ein Potentialfeld ist, wenn $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2$ experimentell gemessen werden kann.

Die Abb. 261 zeigt die Ladungsverteilung der wahren, freien und scheinbaren Ladungen der Platten. Aus der Behauptung, daß die freien Ladungen auf beiden Dielektrika gleich sind, folgt, daß die wahren Ladungen nicht

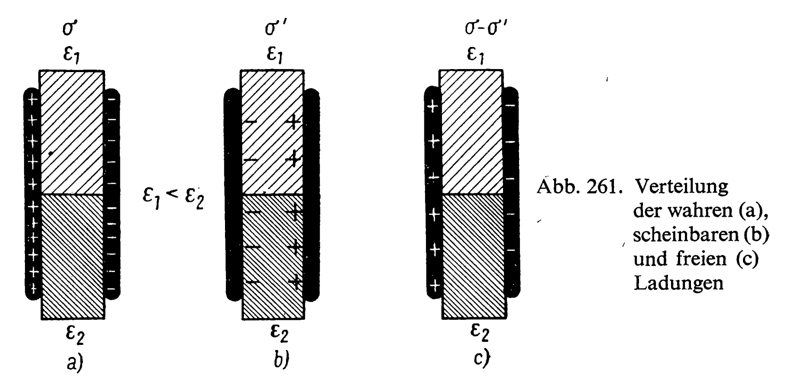


Abb. 261. Verteilung der wahren (a), scheinbaren (b) und freien (c) Ladungen

gleich sein können, weil wegen der verschiedenen Dielektrizitätskonstanten auch die Anzahl der scheinbaren Ladungen verschieden sein muß. Zwischen der wahren Ladungsdichte σ_w und der freien Ladungsdichte σ_f bestehen die Beziehungen

$$\sigma_{1f} = \frac{\sigma_{1w}}{\varepsilon_{1r}},$$

$$\sigma_{2f} = \frac{\sigma_{2w}}{\varepsilon_{2r}}.$$

Außerdem sind

$$\sigma_{1f} = \varepsilon_0 E_1 \quad \text{und} \quad \sigma_{2f} = \varepsilon_0 E_2 .$$

Somit gilt

$$\sigma_{1w} = \sigma_{1f}\varepsilon_{1r} = \varepsilon_0\varepsilon_{1r}E_1 = \varepsilon_1 E_1 = D_1 ,$$

$$\sigma_{2w} = \sigma_{2f}\varepsilon_{2r} = \varepsilon_0\varepsilon_{2r}E_2 = \varepsilon_2 E_2 = D_2 .$$

Die Feldstärke E tritt also kontinuierlich durch die Grenzfläche, sie ist daher auf der einen Seite der Grenzfläche genauso groß wie auf der anderen Seite, D ändert sich jedoch sprunghaft, weil es auf der einen Seite $D_1 = \varepsilon_1 E$, auf der anderen Seite $D_2 = \varepsilon_2 E$ beträgt. Demnach ist

$$D_2 = \varepsilon_2 \frac{D_1}{\varepsilon_1}.$$

5.8. Brechungsgesetz der Kraftlinien

Wenn die Trennfläche zweier Dielektrika zu den Kraftlinien schiefwinklig verläuft (Abb. 262), treten die scheinbaren Ladungen in den in der Abb. 263 gezeigten Volumina längs der Fläche auf, die auf den Kraftlinien senkrecht steht. Entsprechend gilt

$$\sigma' = |\mathfrak{P}| = \varepsilon_0 \varkappa \, |\mathfrak{E}| .$$

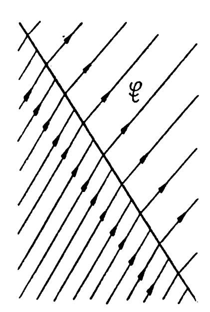


Abb. 262. Trennfläche schiefwinklig zum Kraftlinienverlauf

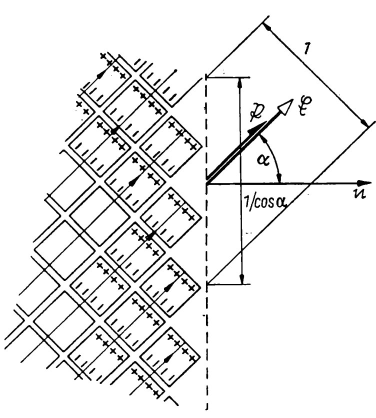


Abb. 263. Die Flächenladung hängt nur von der Normalkomponente des Feldstärke- bzw. Polarisationsvektors ab

Der Abb. 263 ist auch zu entnehmen, daß diese Ladung als Flächenladung nicht auf der Einheitsfläche verteilt, sondern auf der Fläche $\frac{1}{\cos\alpha}$ zu finden ist, so daß die scheinbare Flächenladung

$$\sigma^s = \sigma' \cos\alpha = |\mathfrak{P}| \cos\alpha = \varepsilon_0 \varkappa \, |\mathfrak{E}| \cos\alpha = \varepsilon_0 \varkappa E_n$$

ist. Es spielt also bei der Entstehung der Flächenladung nur die Normalkomponente von $\mathfrak{E}$ eine Rolle. Diese ist es, die durch die scheinbare Ladung verändert wird gemäß der bekannten Beziehung

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

oder

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

Da die einer geladenen Ebene entspringenden Kraftlinien stets auf dieser senkrecht stehen, ändert sich die Tangentialkomponente von $\mathfrak{E}$ nicht, d. h., es ist

$$E_{1t} = E_{2t}.$$

Daraus ergibt sich sofort, daß bei dem durch $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$ definierten Vektor $\mathfrak{D}$ die Beziehung

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} \quad \text{oder} \quad \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

besteht, d. h., daß sich die Tangentialkomponente von $\mathfrak{D}$ sprunghaft ändert.

Es soll nun an Hand der Abb. 264 untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Kraftlinien an einer Fläche ihre Richtung ändern, aber ihre

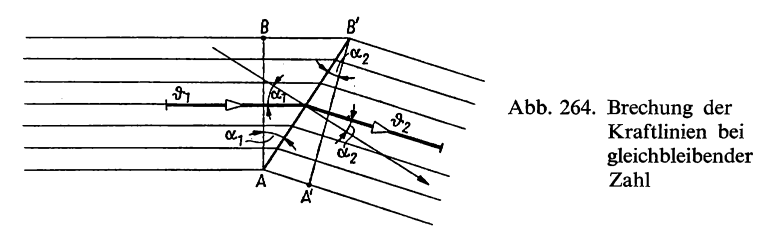


Abb. 264. Brechung der Kraftlinien bei gleichbleibender Zahl

Zahl beibehalten. Die Zahl der Verschiebungslinien, welche durch die Fläche mit dem Schnitt AB hindurchgehen, ist gleich

$$|\mathfrak{D}_1|\, dA \cos\alpha_1 ,$$

wenn diese Fläche senkrecht zur Zeichenebene die Länge 1 besitzt.

Die Zahl der Verschiebungslinien durch die Fläche $A'B' \cdot 1$ ist gleich

$$|\mathfrak{D}_2|\, dA \cos\alpha_2 .$$

Wenn also

$$|\mathfrak{D}_1| \cos\alpha_1 = |\mathfrak{D}_2| \cos\alpha_2 , \quad \text{d. h.} \quad D_{1n} = D_{2n}$$

ist, bleibt die Zahl der Verschiebungslinien unverändert, die Verschiebungslinien weisen also auf der Trennfläche des Dielektrikums auch jetzt keine Divergenz auf. Dagegen besitzt $\mathfrak{E}$ eine Divergenz, da die Quellen von $\mathfrak{E}$ die freien und nicht die wahren Ladungen sind.

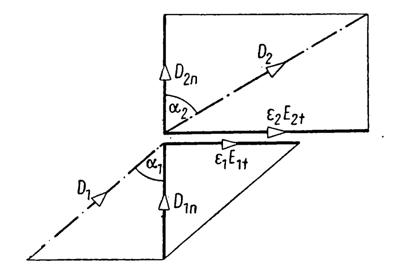


Abb. 265. Brechungsgesetz der dielektrischen Verschiebungslinien

Da der Verlauf von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ an der Grenze der Isolatoren nunmehr bekannt ist, können auch die Brechungsgesetze der Kraft- und Verschiebungslinien aufgestellt werden. Für die Feldstärke besteht der Zusammenhang

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

bzw.

$$E_{1t} = E_{2t},$$

und man kann aus Abb. 265 ablesen, daß

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} : \frac{E_{2t}}{E_{2n}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

für die E- und D-Linien gilt, da wegen $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$ beide Vektoren parallel sind.

5.9. Die Messung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ in Anwesenheit von Isolatoren

Aus einem Dielektrikum werde parallel zu den Kraftlinien ein sehr langer und sehr schmaler Hohlraum ausgeschnitten (Abb. 266). Der Einfluß der schein-

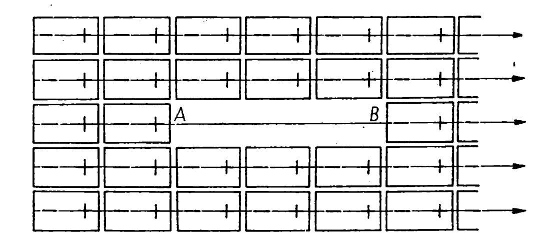


Abb. 266. Messung der Feldstärke im Isolator

baren Ladungen auf den Abschlußflächen A und B auf die Feldstärke kann hier vernachlässigt werden. Da außerdem die Tangentialkomponente der Feldstärke (sie bedeutet hier die gesamte Feldstärke) kontinuierlich durch die Grenzflächen tritt, hat die Feldstärke im Hohlraum und im Dielektrikum den gleichen Wert.

Wird dagegen ein Spalt senkrecht zu den Kraftlinien ausgeschnitten (Abb. 267), dann wird im Spalt die Feldstärke größer sein, als sie an dieser Stelle im Dielektrikum war, da jetzt auch die scheinbaren Ladungen auf der Oberfläche des Isolators zur Ausbildung des Feldes merklich beitragen. Die resultierende Feldstärke im Hohlraum beträgt

$$\mathfrak{E}_h = \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{P}}{\varepsilon_0}.$$

Der Wert des Vektors $\mathfrak{D}$ im Dielektrikum ist dann das ε_0-fache der im Hohlraum gemessenen Feldstärke:

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}_h = \varepsilon_0 \mathfrak{E} + \mathfrak{P}.$$

Durch Messung der Feldstärke im Hohlraum wird also gleichzeitig der Verschiebungsvektor bestimmt.

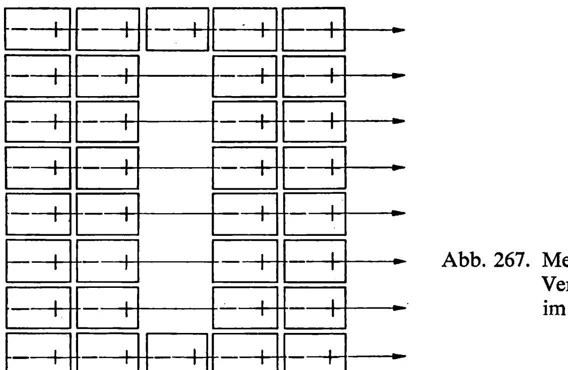


Abb. 267. Messung des Verschiebungsvektors im Isolator

Den Gültigkeitsbereich der Gesetze, die sich aus den behandelten Spezialfällen ergaben, glauben wir nun erweitern zu können, da die Erfahrungen sämtliche daraus abgeleiteten Folgerungen bestätigten. Für das elektrostatische Feld haben wir folgende Grundgesetze kennengelernt:

Das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ ist ein wirbelfreies Potentialfeld:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0.$$

Seine Quellen sind außer den wahren Ladungen auch die scheinbaren Ladungen, welche an den Grenzflächen der Dielektrika oder im Innern eines inhomogenen Dielektrikums auftreten. Die Quellen von $\mathfrak{E}$ sind also die freien Ladungen.

Die Quellen der dielektrischen Verschiebung $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ sind ausschließlich die wahren Ladungen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho.$$

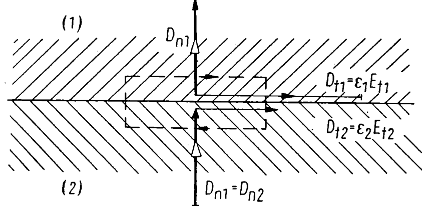


Abb. 268. Integrationsweg zur Demonstration des Satzes, daß das $\mathfrak{D}$-Feld im allgemeinen nicht wirbelfrei ist

Dagegen ist das Feld 𝔇 im allgemeinen nicht wirbelfrei. Da an den Grenzflächen von Isolatoren $D_{1t} \neq D_{2t}$ ist, ergibt das Linienintegral entlang des in der Abb. 268 eingezeichneten Integrationsweges nicht Null. Da für die Bestimmung eines Kraftfeldes die Quellen und die Wirbel eine Rolle spielen und die Wirbel von 𝔇 von den Eigenschaften des Isolators abhängen, ist ganz allgemein die Feststellung falsch, daß sich das Bild der 𝔇-Linien durch das Einsetzen eines Isolators nicht ändert, wenn man die Ladungen auf dem Leiter unverändert ließ. Zwar ändert sich die Zahl der 𝔇-Linien nicht, ihre Verteilung jedoch sicherlich (Abb. 269).

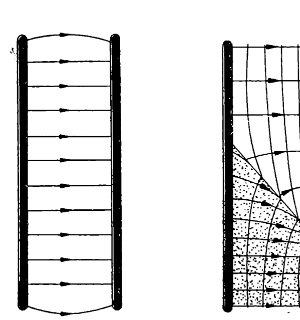


Abb. 269. Verteilung der 𝔇-Linien nach Einsetzen eines Isolators (nach ROTH)

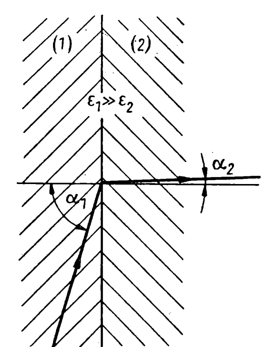


Abb. 270. Verlauf der 𝔇-Linien bei stark unterschiedlicher Dielektrizitätskonstante

5.10. Das Brechungsgesetz bei unvollkommenen Isolatoren

In Abb. 270 ist der Verlauf einer Kraftlinie an der Grenze zweier Dielektrika (1) und (2) unter der Annahme $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ gezeichnet. Im Medium mit der kleineren Dielektrizitätskonstanten bildet die Kraftlinie mit der Trennflächennormalen einen sehr kleinen Winkel. Ist insbesondere (1) ein Medium mit unendlich großer Dielektrizitätskonstante, dann stehen die Kraftlinien im Medium (2) auf der Grenzfläche senkrecht. Ist andererseits (1) ein Metall, dann stehen die Kraftlinien gleichfalls in (2) auf der Grenzfläche senkrecht. Hieraus wird oft fälschlich gefolgert, daß die Metalle Dielektrika mit unendlich großer Dielektrizitätskonstante seien. Wenn die beiden Dielektrika in Abb. 271 eine endliche Leitfähigkeit besitzen, fließt ein Strom mit der Dichte

$$\mathfrak{G} = \gamma \mathfrak{E},$$

und im stationären Zustand ist

$$G_{1n} = G_{2n}.$$

Es gilt also

$$\gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n}.$$

Daraus ist ersichtlich, daß der stetige Übergang der Normalkomponenten von $\mathfrak{D}$, d. h. die Gleichung

$$D_{1n} = D_{2n}$$

oder

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n},$$

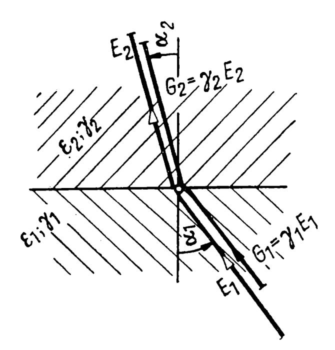


Abb. 271. Grenzfläche zweier Dielektrika mit endlicher Leitfähigkeit

nur dann befriedigt werden kann, wenn die Beziehung

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

erfüllt ist.

Da es aber sehr schwer ist, diese Beziehung bewußt zu realisieren, wird die Normalkomponente von $\mathfrak{D}$ im allgemeinen einen Sprung erleiden, was bedeutet, daß an den Grenzflächen zweier Isolatoren wahre Ladungen auftreten werden. Die Größe der wahren Ladungsdichte ist

$$\sigma = D_{1n} - D_{2n}.$$

Da

$$G_{1n} = \gamma_1 E_{1n} = \frac{\gamma_1}{\varepsilon_1} D_{1n} = G_{2n} = \frac{\gamma_2}{\varepsilon_2} D_{2n} = G_n$$

ist, folgt

$$D_{1n} = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} G_n,$$

$$D_{2n} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} G_n.$$

Als Endergebnis erhalten wir

$$\sigma = \varepsilon_1 \frac{G_n}{\gamma_1} - \varepsilon_2 \frac{G_n}{\gamma_2} = G_n \left(\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \right). \tag{5.10.1}$$

Dies kann hier nur dann gleich Null sein, wenn

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$$

ist.

Wenn der Stoff (1) ein idealer Leiter und (2) ein idealer Isolator ist, kann im stationären Fall kein Strom fließen. Es sind dann

$$G_n = 0, \quad \gamma_1 = \infty, \quad \gamma_2 = 0.$$

Damit wird der erste Faktor in (5.10.1) Null, der zweite Faktor wird unbestimmt. Damit kann die Gleichung (5.10.1) durch jeden beliebigen Wert ε_1 erfüllt werden. Dies weist darauf hin, daß über die Dielektrizitätskonstanten der Metalle durch elektrostatische Messungen keinerlei Aufschluß zu erlangen ist.

In 5.3. wurde die zeitliche Änderung der Ladungsdichte $\varrho(x, y, z, t)$ im Innern eines massiven Metalleiters untersucht. Dabei ergab sich ein exponentieller Abfall mit der Zeit:

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon} t}.$$

Die Zeitkonstante ε/γ ist von der Größenordnung 10^{-15} s. So kleine Zeitspannen spielen nur in der Theorie des Lichtes eine Rolle. Dort kann die Dielektrizitätskonstante der Metalle tatsächlich auf Grund dieser Gleichung abgeschätzt werden, und es zeigt sich, daß sie sich von der Dielektrizitätskonstanten der Isolatoren größenordnungsmäßig nicht unterscheidet.

5.11. Die Berechnung des elektrischen Feldes in einigen Spezialfällen

Da das elektrische Feld im Dielektrikum komplizierter gestaltet ist als im Vakuum, ist dort auch seine Bestimmung schwieriger und gelingt nur in einigen Fällen.

In den vorangehenden Abschnitten haben wir bereits den Plattenkondensator mit parallel und senkrecht zu den Kraftlinien geschichteten Dielektrika behandelt. Bei einigen anderen Anordnungen kann das Feld durch Anwendung des GAUSSschen Satzes bestimmt werden, wenn für $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{D}$ irgendwelche Vereinfachungen vorausgesetzt werden. Zum Beispiel kann in dieser Weise der Fall des koaxialen Kabels mit geschichtetem Dielektrikum behandelt werden.

5.11.1. *Das Kabel mit geschichtetem Dielektrikum*

In der Abb. 272 ist der Schnitt durch ein Kabel mit geschichteter Isolation gezeichnet. Es wird von der Voraussetzung ausgegangen, daß der Betrag des Verschiebungsvektors $\mathfrak{D}$ ausschließlich von den wahren Ladungen abhängt, so daß wegen der Zylindersymmetrie

$$D = \frac{q}{2\pi\, r}$$

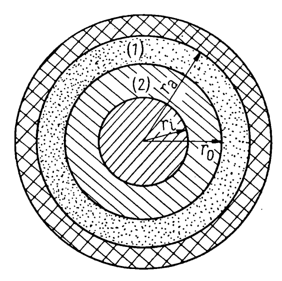


Abb. 272. Kabel mit geschichtetem Dielektrikum

ist. Die Feldstärken in den Dielektrika (1) und (2) werden

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{q}{2\pi\, \varepsilon_1} \frac{1}{r}, \quad E_2 = \frac{q}{2\pi\, \varepsilon_2} \frac{1}{r}$$

sein. Dementsprechend beträgt die Potentialdifferenz zwischen dem inneren Zylinder und der Trennfläche der Isolatoren

$$U_1 = \frac{q}{2\pi\, \varepsilon_1} \ln \frac{r_0}{r_i},$$

zwischen der Trennfläche der Isolatoren und dem äußeren Zylinder

$$U_2 = \frac{q}{2\pi\, \varepsilon_2} \ln \frac{r_a}{r_0}.$$

Die Gesamtspannung ist

$$U = U_1 + U_2 = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{r_0}{r_i} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{r_a}{r_0} \right],$$

und die Kapazität des geschichteten Kabels wird

$$C = \frac{lq}{U} = \frac{1}{\dfrac{1}{2\pi\, \varepsilon_1 l} \ln \dfrac{r_0}{r_i} + \dfrac{1}{2\pi\, \varepsilon_2 l} \ln \dfrac{r_a}{r_0}},$$

wobei l die Länge des Kabels bedeutet.

5.11.2. *Die Lösung für den allgemeinen Fall*

In einem etwas allgemeineren Fall treten ernste Schwierigkeiten bei der Berücksichtigung der Wirkung der scheinbaren Ladungen auf, die auf der Oberfläche der Isolatoren erscheinen.

Zunächst scheint folgender Lösungsweg möglich: Es wird das Feld der wahren Ladungen bestimmt, als ob überhaupt kein Isolator vorhanden wäre. In dieses Feld wird das Dielektrikum nachträglich eingesetzt und untersucht, wieviel scheinbare Ladungen diese Feldstärke durch Polarisation an den Grenzflächen oder im Innern der Isolatoren hervorruft. Das so entstandene Feld der scheinbaren Ladungen wird berechnet und sodann das ursprüngliche Feld durch dieses überlagert. Daraus folgt dann das endgültige Kraftfeld.

Diese Überlegung ist aber falsch. Der Polarisationsvektor bzw. die Größe der wegen der Polarisation erscheinenden Ladung hängt nicht vom Feld der freien Ladungen, sondern vom resultierenden Feld ab. Um diese Ladungen bestimmen zu können, muß man also die resultierende Feldstärke schon kennen, d. h., die Aufgabe müßte bereits gelöst sein. Grundbedingung einer echten Lösung ist jedoch, daß das gemeinsame Feld der bei bekannter Feldstärke bestimmten scheinbaren und wahren Ladungen zusammen die bekannte Feldstärke ergibt.

Die meisten Lösungen sind schrittweise Näherungen, die freilich systematisch begonnen und durchgeführt werden müssen. Man nimmt z. B. in erster Näherung an, daß das Dielektrikum durch das Feld der wahren Ladungen polarisiert wird. Im Endergebnis wird die Kontrolle diesen Versuch bestätigen oder verwerfen. Wenn das so berechnete $\mathfrak{E}$-Feld überall ein Potentialfeld, d. h. ein wirbelfreies Feld, und im Innern eines homogenen Dielektrikums quellenfrei ist und an den Grenzflächen der verschiedenen Isolatoren das Brechungsgesetz erfüllt wird, d. h. die Tangentialkomponente der Feldstärke kontinuierlich, die Normalkomponente jedoch gemäß dem Verhältnis $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ durch die Trennfläche hindurchtritt, so ist die einzig mögliche Lösung der Aufgabe gefunden.

Mathematisch bedeutet dies, daß $\mathfrak{E}$ überall die Gleichung $\operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0$ befriedigt. Diese kann daher nach der Gleichung $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U$ aus einer Potentialfunktion abgeleitet werden. Im Innern des homogenen Dielektrikums muß

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = -\operatorname{div}\operatorname{grad} U = -\Delta U = 0$$

sein. Wo Ladungen bestehen und die Lösung die Gleichung

$$\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E} = \varrho$$

befriedigt sowie an den Grenzflächen der Isolatoren, wo sich keine Ladungen

befinden, muß

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \text{und} \quad E_{1t} = E_{2t}$$

gelten.

Die Richtigkeit der Lösungen einzelner physikalischer Aufgaben kann man daher eindeutig entscheiden, doch läßt sich keine allgemeine Anleitung zur Lösung geben.

Nachstehend soll an zwei Beispielen gezeigt werden, wie auf Grund der bekannten qualitativen Lösung sich durch geeignete Annahmen eine quantitative Lösung erreichen läßt.

5.11.3. *Der aus Isolatoren bestehende Halbraum*

Es soll der Raum gemäß Abb. 273 durch eine Ebene halbiert werden. Die eine Hälfte sei mit einem Isolator (1) mit der Dielektrizitätskonstanten ε_1 ausgefüllt, die andere Hälfte mit einem Isolator (2) mit der Dielektrizitätskonstanten ε_2. Es sei nun im Stoff (1), für den man ohne Beschränkung der Allgemeinheit einfachheitshalber Luft annimmt, im Punkt P eine punktförmige

P o Q

(1) ε_1

(2)

ε_2

Abb. 273. Punktladung im luftgefüllten Halbraum

Ladung Q untergebracht. Es soll das Feld der punktförmigen Ladung bestimmt werden, die einem einen Halbraum ausfüllenden Dielektrikum gegenübersteht.

Wir können folgendes qualitative Feldbild voraussagen. Im Medium (1) verläuft das Feld so, als ob sich im Medium (2) eine andere negative Ladung befände (Abb. 274). Die Ladung Q muß also an der Grenzfläche gespiegelt werden, doch kann die Spiegelladung sicherlich nicht $-Q$ betragen, sondern

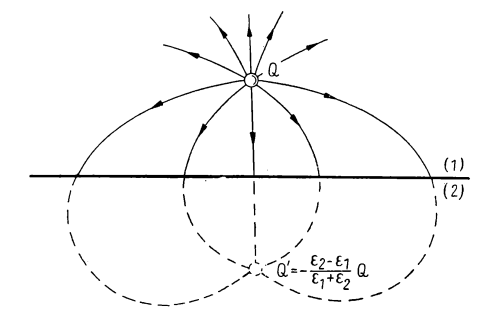


Abb. 274. Elektrisches Feld im oberen Halbraum

z. B. $Q' = -\nu Q$, wobei durch den Faktor ν die Lösung den Grenzbedingungen angepaßt werden kann. Das Potential ist also im Feldabschnitt (1)

$$U_{(1)} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_1}\frac{1}{r} - \frac{\nu Q}{4\pi\,\varepsilon_1}\frac{1}{r'},$$

wobei r die Entfernung des Aufpunktes von der Ladung Q und r' seine Entfernung von der Ladung $-\nu Q$ sind.

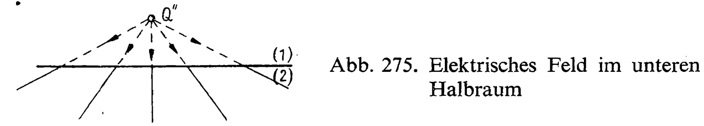


Abb. 275. Elektrisches Feld im unteren Halbraum

Im Medium (2) verläuft das Feld, als ob es nur von einer einzigen Punktladung erzeugt worden wäre. Es soll versucht werden, dieses Kraftfeld durch die in den Punkt P versetzte Ladung $Q'' = \lambda Q$ zu erzeugen (Abb. 275). λ muß gleichfalls später aus den Grenzbedingungen bestimmt werden.

Dann beträgt das Potential

$$U_{(2)} = \frac{\lambda Q}{4\pi\,\varepsilon_2}\frac{1}{r}.$$

Wir haben damit für jeden Halbraum eine selbständige Potentialfunktion. Diese Funktionen sind die beiden Teile einer einzigen Potentialfunktion, durch die ein und dasselbe Kraftfeld beschrieben wird. Es ist notwendig, daß die beiden Funktionen an der Grenzfläche stetig ineinander übergehen.

In der Trennebene muß also der Wert des Potentials $U_{(1)}$ gleich dem Wert von $U_{(2)}$ sein:

$$\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_1}\frac{1}{R} - \frac{\nu Q}{4\pi\,\varepsilon_1}\frac{1}{R} = \frac{\lambda Q}{4\pi\,\varepsilon_2}\frac{1}{R},$$

wobei R der Abstand zwischen einem beliebigen Punkt der Trennfläche und den Ladungen Q' bzw. Q'' bedeutet. Dieser Abstand ist bei allen drei Ladungen der gleiche, da Q und Q'' örtlich zusammenfallen und Q' die Spiegelladung ist. Man kann folglich obige Gleichung zu

$$\frac{Q - \nu Q}{\varepsilon_1} = \frac{\lambda Q}{\varepsilon_2}$$

vereinfachen, woraus eine erste Bestimmungsgleichung für ν und λ folgt:

$$(1 - \nu)\,\varepsilon_2 = \lambda\varepsilon_1.$$

Durch die Bedingung, daß das Potential auf beiden Seiten der Oberfläche gleich groß ist, wurde gesichert, daß die Tangentialkomponente der Feldstärke die Trennebene stetig überschreitet. Diese Tangentialkomponente ist nämlich die Änderung des Potentials pro Längeneinheit längs der Oberfläche. Da die Potentiale selbst entlang der Oberfläche übereinstimmen, müssen auch ihre Ableitungen in dieser Richtung identisch sein.

Da sich an den Grenzflächen keine wahren Ladungen befinden, besitzt die Normalkomponente von $\mathfrak{D}$ einen stetigen Übergang:

$$D_{n1} = D_{n2}.$$

In einem von Q in beliebiger Entfernung R in der Grenzfläche befindlichen Punkt ist

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{R^2} \mathfrak{R}^0.$$

Seine Normalkomponente beträgt (a = Abstand, Ladung — Trennfläche)

$$D_n = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{R^2} \cos\alpha = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{R^2} \frac{a}{R} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{R^3} a.$$

Damit lautet die Gleichung $D_{n1} = D_{n2}$ ausführlich geschrieben

$$\frac{1}{4\pi} \frac{Q}{R^3} a + \frac{1}{4\pi} \frac{\nu Q}{R^3} a = \frac{\lambda Q}{4\pi R^3} a.$$

Hieraus folgt als zweite Bestimmungsgleichung für ν und λ

$$1 + \nu = \lambda.$$

Aus beiden Bestimmungsgleichungen erhält man schließlich

$$\nu = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2},$$

$$\lambda = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst. In das Spiegelbild der Ladung Q ist demnach die Ladung

$$Q' = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q$$

zu setzen. Durch das gemeinsame Fèld der Ladungen Q und Q' wird dann das wirkliche Feld im Feldteil (1) geliefert. Weiterhin ist die Ladung

$$Q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q$$

an Stelle der Ladung Q zu setzen, und man hat sich das ganze Feld mit einem Dielektrikum (2) ausgefüllt vorzustellen. Dann wird das Feld der Ladung Q'' im Feldteil (2) das wirkliche Feld geben (Abb. 276).

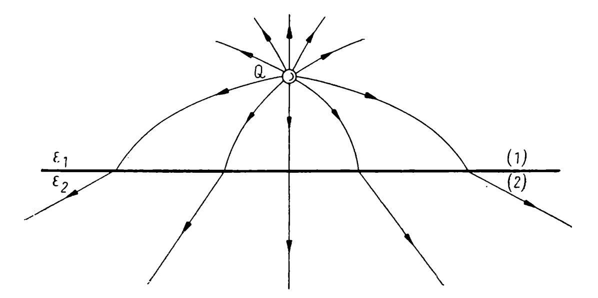


Abb. 276. Wirkliches Feld der Punktladung Q

5.11.4. *Die dielektrische Kugel im homogenen äußeren Feld*

Als zweites Beispiel soll untersucht werden, was geschieht, wenn in ein homogenes äußeres Feld ein kugelförmiges Dielektrikum gebracht wird. Die Kugel wird polarisiert, an ihrer Oberfläche erscheinen Ladungen. Durch die Resultierende des Feldes dieser Ladungen und des ursprünglichen Feldes wird das Dielektrikum polarisiert.

Da das äußere Feld homogen ist, wird man zunächst vermuten, daß dadurch eine dem Feld parallele Polarisation hervorgerufen wird. Wenn sich nämlich herausstellt, daß die Flächenladungen im Innern der Kugel ein homogenes Feld erzeugen, dann wird auch das resultierende Feld homogen sein, woraus sich tatsächlich eine homogene Polarisation ergibt. Es hängt also alles davon ab, ob durch das innere Feld des homogen polarisierten kugelförmigen Dielektrikums eine homogene Feldstärke $\mathfrak{E}$ erzeugt wird oder nicht.

Bei einer homogenen Polarisation des Dielektrikums ist der Vektor $\mathfrak{P}$ überall gleich groß und gleich gerichtet. Entsprechend erscheinen in jedem Punkt der Kugeloberfläche scheinbare Ladungen, die der Normalkomponente von $\mathfrak{P}$ proportional sind (Abb. 277):

$$\sigma^s = \mathfrak{P}\mathfrak{n} = |\mathfrak{P}| \cos\varphi .$$

Dies kann auch so aufgefaßt werden, daß sich die positiven und negativen Ladungen der Moleküle im Innern der ganzen Kugel voneinander entfernen, so daß ihre Schwerpunkte nicht mehr zusammenfallen (Abb. 278). Ist l die

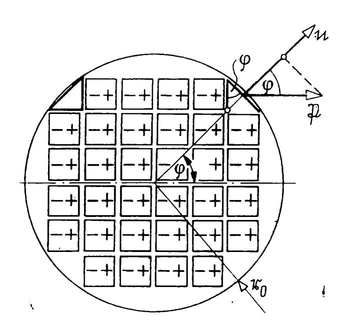


Abb. 277. Homogen polarisierte Kugel

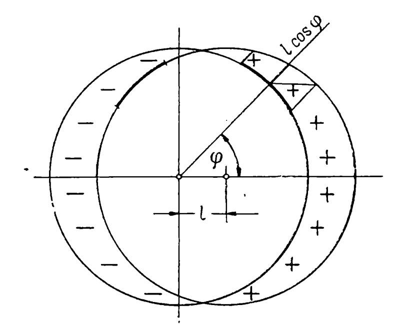


Abb. 278. Von $\cos\varphi$ abhängige Oberflächenleitungsdichte

Größe der Schwerpunktverschiebung, so entsteht hierbei über der Einheitskugelfläche in einem Raumteil von der Höhe $l\cos\varphi$ eine Ladung, die einer zu $\cos\varphi$ proportionalen Oberflächendichte entspricht.

Zwischen der positiven oder negativen Ladungsdichte ϱ, der Verschiebung l und dem Polarisationsvektor $|\mathfrak{P}|$ ergibt die Gleichung

$$\sigma^s = |\mathfrak{P}|\cos\varphi = \varrho l \cos\varphi$$

den Zusammenhang

$$|\mathfrak{P}| = \varrho l.$$

Das hierdurch entstandene Feld kann nun wie folgt berechnet werden.

Das Potential der mit der Ladungsdichte $+\varrho$ versehenen Kugel in einem inneren Punkt der Kugel ist

$$U_+ = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\left(r_0^2 - \frac{r_+^2}{3}\right), \tag{5.11.1}$$

wobei r_+ die Entfernung des betreffenden Punktes vom Mittelpunkt der positiv geladenen Kugel bedeutet. (Ein Beweis wird am Schluß dieses Abschnitts gegeben.) In demselben Punkt ist

$$U_- = -\frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\left(r_0^2 - \frac{r_-^2}{3}\right).$$

Das resultierende Potential im Innern des Dielektrikums ist

$$U = U_+ + U_- = -\frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\frac{r_+^2 - r_-^2}{3}.$$

Aus der Abb. 279 ist folgender Zusammenhang zu entnehmen:

$$(r_+^2 - r_-^2) = (\mathfrak{r}_+ + \mathfrak{r}_-)(\mathfrak{r}_+ - \mathfrak{r}_-) = 2\mathfrak{r}(-\mathfrak{l}) = -2\mathfrak{r}\mathfrak{l}.$$

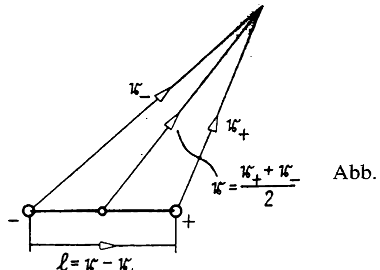


Abb. 279. Geometrische Verhältnisse in der homogen polarisierten Kugel

Damit wird

$$U = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{r}}{3\varepsilon_0}. \tag{5.11.2}$$

Das ganze Außenfeld des kugelförmigen Isolators, d. h. das resultierende Feld zweier um l verschobener, mit konstanten positiven und negativen Ladungsdichten belegter Kugeln, kann wie das Feld eines Dipols vom Moment $\frac{4\pi}{3} r_0^3 \mathfrak{P}$ berechnet werden, denn $\mathfrak{P}$ ist das Dipolmoment der Volumeneinheit. Das Potential eines beliebigen Punktes im Feld außerhalb der Kugel ist

$$U = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0 \cdot 3}\frac{4\pi\, r_0^3 \mathfrak{P}\mathfrak{r}}{r^3} = \frac{r_0^3}{3\varepsilon_0}\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{r}}{r^3}. \tag{5.11.3}$$

Jetzt kann man demnach das Feld innerhalb und außerhalb der Kugel berechnen. Zuerst interessiert uns das Feld im Innern der Kugel. Die Komponenten der Feldstärke in verschiedenen Richtungen erhält man aus der Ableitung des Potentials. Wenn die x-Achse die Richtung von $\mathfrak{P}$ hat, gilt

$$U = \frac{r^3}{3\varepsilon_0}\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{r}}{r^3} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{r}}{3\varepsilon_0} = \frac{|\mathfrak{P}|\, x}{3\varepsilon_0} = \frac{Px}{3\varepsilon_0}.$$

Die Feldstärke besitzt dann also eine einzige Komponente in x-Richtung, d. h., sie wird mit $\mathfrak{P}$ parallel sein. Damit gilt

$$\mathfrak{E} = -\frac{\partial U}{\partial x}\,\mathfrak{i} = -\frac{\mathfrak{P}}{3\varepsilon_0}. \tag{5.11.4}$$

Demnach ist im Innern einer homogen polarisierten Kugel auch die Feldstärke homogen, und zwar überall proportional $\mathfrak{P}$.

Nun kann das Feld eines in ein homogenes äußeres Feld $\mathfrak{E}_0$ gesetzten kugelförmigen Dielektrikums beschrieben werden. Der homogene Polarisationsvektor sei $\mathfrak{P}$, das Feld, welches von den scheinbaren Ladungen herrührt, die dieser Vektor erzeugt hat, sei $\mathfrak{E}^*$, woraus sich das resultierende Feld zu $\mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}^* = \mathfrak{E}$ ergibt. Durch dieses wird die Polarisation

$$\mathfrak{P} = \varkappa\varepsilon_0\mathfrak{E} = (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0\mathfrak{E} = (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0(\mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}^*) \tag{5.11.5}$$

erzeugt. Nach (5.11.4) besteht zwischen dieser und der erzeugten Feldstärke $\mathfrak{E}^*$ die Beziehung

$$\mathfrak{P} = -3\varepsilon_0\mathfrak{E}^*,$$

die in die Gleichung (5.11.5) eingesetzt

$$-\mathfrak{E} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\,\mathfrak{E}_0$$

ergibt.

Somit ist die Polarisation

$$\mathfrak{P} = 3\varepsilon_0\,\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\,\mathfrak{E}_0.$$

Nun kann auch das Potential außerhalb und innerhalb der Kugel angegeben werden. Außerhalb setzt es sich einerseits aus dem Potential

$$U_0 = -\mathfrak{E}_0\mathfrak{r},$$

andererseits aus dem Potential der Polarisationsladungen

$$U^* = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{4\pi}{3}\,r_0^3 \cdot 3\varepsilon_0\,\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\,\frac{\mathfrak{E}_0\mathfrak{r}}{r^3} = r_0^3\,\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\,\frac{\mathfrak{E}_0\mathfrak{r}}{r^3}$$

zusammen. Dies liefert

$$U_{\text{außen}} = -\mathfrak{E}_0\mathfrak{r} + r_0^3\,\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\,\frac{\mathfrak{E}_0\mathfrak{r}}{r^3}.$$

Im Innern der Kugel setzt sich das Potential gleichfalls aus zwei Teilen zusammen:

$$U_{\text{innen}} = -\mathfrak{E}_0\mathfrak{r} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\mathfrak{E}_0\mathfrak{r} = -\mathfrak{E}_0\mathfrak{r}\frac{3}{\varepsilon_r + 2}.$$

Daraus ergibt sich das resultierende Feld zu

$$\mathfrak{E} = \frac{3}{\varepsilon_r + 2}\mathfrak{E}_0.$$

Da $\varepsilon_r > 1$ ist, ist das so erhaltene Feld stets kleiner als das ursprüngliche Feld. Ist $\varepsilon_r \gg 1$, ist das Feld im Innern der Kugel entsprechend sehr klein.

Unsere Formeln gelten selbstverständlich auch dann, wenn das äußere homogene Feld nicht im Vakuum, sondern in einem Medium mit einer Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_2 > 1$ existiert. In diesem Fall ist statt ε_r überall das Verhältnis $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ zu setzen.

Dieses Verhältnis kann größer oder kleiner als 1 sein (Abb. 280). Falls die Dielektrizitätskonstante des äußeren Feldabschnittes größer als die der Kugel ist, wird $\varepsilon_{1r}/\varepsilon_{2r} < 1$, so daß die Polarisation $\mathfrak{P}$ dem Feld $\mathfrak{E}_0$ entgegengesetzt und dadurch das resultierende Feld größer als das äußere Feld ist. Wenn der Stoff im äußeren Feld eine sehr große Dielektrizitätskonstante besitzt, erhält man

$$\mathfrak{E} \to \frac{3}{2}\mathfrak{E}_0.$$

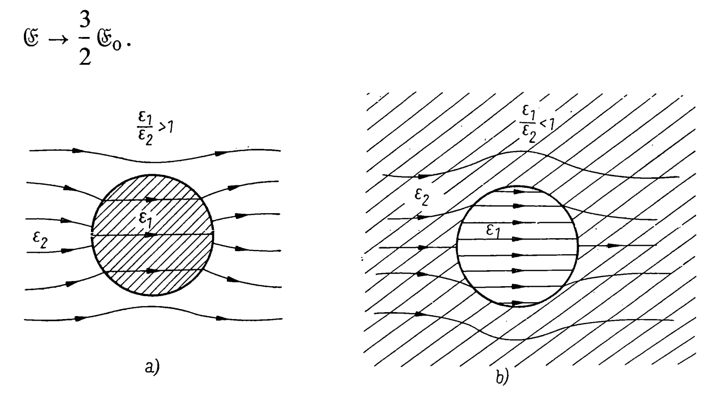


Abb. 280. Kraftfeld des äußeren Feldes und der homogen polarisierten Kugel bei verschiedenen Dielektrika

Um unsere Untersuchungen zu vervollständigen, muß noch gezeigt werden, daß an der Oberfläche der Kugel die beiden Potentialfunktionen $U_{\text{außen}}$ und U_{innen} den gleichen Wert besitzen. Dies ist leicht zu sehen, wenn man $r = r_0$

setzt. Gleichfalls ist noch zu beweisen, daß an den Grenzflächen der Kugel überall $D_{1n} = D_{2n}$ ist. Dies ergibt sich einfach aus der Ableitung der Potentialfunktionen.

Abschließend wollen wir noch beweisen, daß das Potential in einem Punkt im Innern einer homogen geladenen Kugel tatsächlich durch die Beziehung

$$U_i = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\left(r_0^2 - \frac{r^2}{3}\right) \tag{5.11.6}$$

dargestellt wird.

Das Potential der Kugeloberfläche ist

$$U_0 = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{r_0} = \frac{4\pi}{3}\,r_0^3\varrho\,\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{r_0} = \frac{\varrho r_0^2}{3\varepsilon_0}\,.$$

Durch Anwendung des GAUSSschen Satzes erhalten wir die Feldstärke im Innern der Kugel:

$$D_i \cdot 4\pi\,r^2 = \varrho\,\frac{4r^3\,\pi}{3}, \quad \text{d. h.} \quad E_i = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\,r.$$

Folglich ist das Potential

$$U_i = U_0 + \int_r^{r_0} E_i\,dr = \frac{\varrho r_0^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\,\frac{r_0^2 - r^2}{2}$$

$$= \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\left(r_0^2 - \frac{r^2}{3}\right).$$

Das ist aber gerade unsere Ausgangsgleichung (5.11.6).

5.12. Die Grundgesetze des elektrostatischen Feldes

Wir fassen den bisher behandelten Stoff zusammen. Das Feld $\mathfrak{E}$ ist überall wirbelfrei, ist also ein Potentialfeld. Physikalisch bedeutet dies, daß die vom Kraftfeld geleistete Arbeit gleich Null ist, wenn man im elektrostatischen Feld eine Ladung längs einer geschlossenen Linie führt. Der grundlegende Erfahrungssatz lautet demnach

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0\,.$$

Dieses Kraftfeld besitzt nicht nur dort Quellen, wo Überschußladungen, d. h. wahre Ladungen, vorhanden sind, sondern auch dort, wo sich die Ladungen eines neutralen Dielektrikums verschieben und als Folge dieser Verschiebung an der Oberfläche oder an inhomogenen Stellen lokale Überschußladungen

erscheinen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon} - \frac{\mathfrak{E} \operatorname{grad} \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Diese Gleichung insbesondere begründet die Einführung des Vektors $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$, so daß man vereinfacht schreiben kann

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho.$$

Die Quellen des Verschiebungsvektors $\mathfrak{D}$ sind demnach ausschließlich die wahren Ladungen. Diese Gleichung erweckt, worauf bereits hingewiesen wurde, den Anschein, als ob das Vektorfeld $\mathfrak{D}$ von den scheinbaren Ladungen unabhängig wäre. Untersucht man jedoch die Rotation des Vektorfeldes $\mathfrak{D}$, so gilt bekanntlich

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = \operatorname{rot} \frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon} = 0.$$

Es folgt

$$\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \mathfrak{D} + \operatorname{grad} \frac{1}{\varepsilon} \times \mathfrak{D} = 0,$$

d. h.

$$\operatorname{rot} \mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{D} \times \operatorname{grad} \frac{1}{\varepsilon} = -\frac{\mathfrak{D} \times \operatorname{grad} \varepsilon}{\varepsilon},$$

woraus folgt, daß $\mathfrak{D}$ überall dort Wirbel besitzt, wo sich ε ändert und diese Änderung eine senkrechte Komponente zu $\mathfrak{D}$ aufweist, die Grenzfläche also nicht zufällig auf $\mathfrak{D}$ senkrecht steht. Lediglich im letzten Fall wird das Feld $\mathfrak{D}$ von der wahren Ladung vollkommen bestimmt.

Während die Kraftwirkung durch die $\mathfrak{E}$-Linien beschrieben wird, gibt die Zahl der $\mathfrak{D}$-Linien die wahren Ladungen wieder. So wird zur Beschreibung und Charakterisierung eines Feldes jeweils die eine oder andere Größe herangezogen werden müssen.

5.13. Die Verschiebungsstromdichte im Dielektrikum

Wenn man auf den Platten eines Kondensators, der mit einem homogenen Dielektrikum ausgefüllt ist, die Ladungen ändert, so verändert sich die Flächenladungsdichte und damit auch die Größe des Verschiebungsvektors entsprechend der Beziehung

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dD}{dt}.$$

Die Leitungsstromdichte $\mathfrak{G}$ schließt auch jetzt die Verschiebungsstromdichte $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$ ein, und die Gesamtstromdichte $\mathfrak{G} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt}$ muß quellenfrei sein. Der Verschiebungsstromdichte $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$ wird im Einklang mit den Experimenten dieselbe magnetisierende Wirkung zugesprochen wie der Leitungsstromdichte. Die Verschiebungsstromdichte $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$ kann nun in zwei voneinander gänzlich verschiedene Komponenten zerlegt werden. Aus

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E} + \mathfrak{P}$$

folgt

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\mathfrak{E}}{dt} + \frac{d\mathfrak{P}}{dt}$$

oder

$$\frac{dD}{dt} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} + \frac{d\sigma^s}{dt}.$$

Das zweite Glied der rechten Seite beschreibt die Veränderung der durch die Polarisation je Zeiteinheit erscheinenden Oberflächenladung. Diese Ladung ändert sich dadurch, daß z. B. mit steigender Feldstärke eine immer größere Flächenladungsdichte entsteht. Die positiven und negativen Ladungen der ursprünglich neutralen Moleküle werden ständig stärker polarisiert. Dadurch gelangen immer mehr tieferliegende Molekülladungen an die Oberfläche (Abb. 281). Wo immer im Innern des Isolators eine Fläche senkrecht auf den

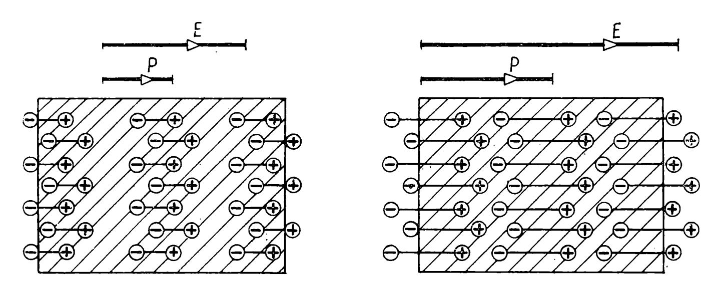


Abb. 281. Erhöhung der Polarisation führt zu einer Verschiebung der Ladungen

Kraftlinien steht, strömen Ladungen hindurch, wenn sich die Polarisation zeitlich ändert. So bedeutet der Ausdruck dP/dt eine Ladungsströmung, und es ist nicht überraschend, daß sich dadurch ein Magnetfeld aufbaut. Dem

Ausdruck

$$\varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

kann man keine ähnliche Deutung beimessen. Darum muß es als eine grundlegende Tatsache hingenommen werden, daß auch durch die Änderung des elektrischen Feldes, die mit keinerlei Bewegung von Ladungen verbunden ist, ein magnetisches Feld erzeugt werden kann.

5.14. Die Erscheinungen der Ferroelektrizität

Es gibt besondere Stoffe, bei denen der Zusammenhang zwischen E und D nicht linear ist. Dementsprechend ist ε nicht konstant, sondern eine Funktion der Feldstärke E. Sie steigt zuerst rasch mit der Feldstärke, erreicht ein Maximum und sinkt danach wieder ab (Abb. 282). Solche Stoffe sind z.B. das Seignettesalz [$NaK(C_4H_4O_6) \cdot 4H_2O$] oder das Bariummetatitanat ($BaOTiO_2$). Die Dielektrizitätskonstante hängt aber auch von der Temperatur ab (Abb. 283).

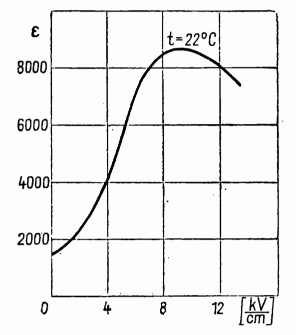


Abb. 282. Zusammenhang von ε und E bei ferroelektrischen Stoffen

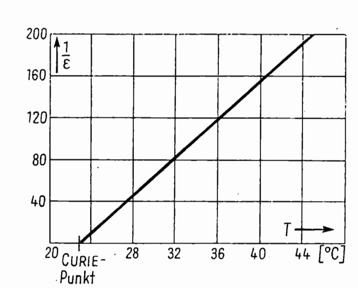


Abb. 283. Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von der Temperatur

Diese Erscheinung beruht auf einer strukturellen Eigenschaft des Stoffes. Deshalb ist eine ausgeprägte, von der Struktur abhängige, räumliche Anisotropie zu erwarten. Das Seignettesalz zeigt z. B. nur entlang der einen Kristallachse (in der Abb. 284 entlang der z-Achse) ferroelektrische Erscheinungen, in den beiden anderen Richtungen ist der Zusammenhang zwischen E und D linear.

Diese elektrischen Erscheinungen ähneln in starkem Maße dem Ferromagnetismus. Deshalb nennt man sie ferroelektrische Erscheinungen, wenngleich sie mit dem Eisen nichts zu tun haben.

Die ferroelektrischen Stoffe können überall da verwendet werden, wo in einem Stromkreis nichtlineare Schaltelemente benötigt werden, z. B. in Regelkreisen, bei der Frequenzvervielfachung, Frequenzmodulation usw.

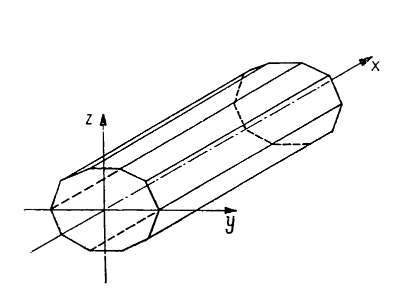


Abb. 284. Seignettesalzkristall

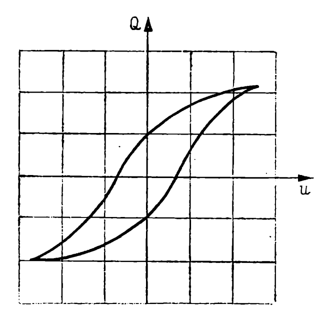


Abb. 285. Ferroelektrische Hysteresiskurve

Bei den ferroelektrischen Stoffen tritt auch eine Hysterese auf (Abb. 285). Nachdem das Feld ausgeschaltet wurde, zeigt der Verschiebungsvektor nicht Null, sondern es bleibt eine remanente Verschiebung bzw. Polarisation bestehen. Wenn sich die Dipole im flüssigen Zustand ordnen, entsteht ein sehr stark permanent dielektrischer Stoff, der sogenannte Elektret. An der Oberfläche solcher Stoffe verbleiben auch nach dem Verschwinden des Feldes scheinbare Ladungen. Die praktische Verwendung der Elektrete wird durch die Tatsache erschwert, daß ihr Feld aus der angrenzenden Luft oder, da sie nicht unendlich gute Isolatoren sind, aus sich selbst heraus geladene Teilchen anziehen, die das Feld nach außen hin abschirmen. Die Anwesenheit der permanent polarisierten Dipole kann auch in diesem Fall nachgewiesen werden. Die Größe der Polarisation hängt nämlich von der Temperatur und der Feldstärke ab, bei deren Änderung die freien Ladungen nicht mehr durch adsorbierte Ionen neutralisiert werden und so ihre Wirkung wieder zur Geltung kommt.

Ein aus sehr gutem Isolationsmaterial hergestellter Elektret kann, wenn er durch ein Metallgehäuse gegen die Anlagerung von Ionen aus der Umgebung geschützt wird, jahrelang seine Polarisation beibehalten. Die Elektrete werden in Mikrophonen, Lautsprechern und sogar als Spannungsquellen oder bei besonderen optischen Geräten verwendet.

Das elektrische Feld der Elektrete wird ausschließlich von den scheinbaren Ladungen erzeugt, da sie wahre Ladungen überhaupt nicht besitzen. Somit ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \operatorname{div} (\varepsilon_0 \mathfrak{E} + \mathfrak{P}) = 0.$$

Hier zeigt sich besonders deutlich, daß die wahren Ladungen allein das Feld $\mathfrak{D}$ nicht bestimmen können, sondern nur seine Quellen angeben. Wenn aber

keine Quellen vorhanden sind, kann das Feld nur dann bestehen, wenn es Wirbel besitzt. Das $\mathfrak{P}$-Feld ist ein sehr einfaches Feld. Es hat Quellen (weil seine Intensität sich in der Richtung der parallelen Kraftlinien ändert) und auch Wirbel (weil seine Intensität sich auch vertikal zu den parallelen Kraftlinien ändert). Die Quellen von $\mathfrak{P}$ fallen mit den Quellen von $-\mathfrak{E}$, die Wirbel von $\mathfrak{P}$ mit den Wirbeln von $\mathfrak{D}$ zusammen. So ergibt sich die Abb. 286.

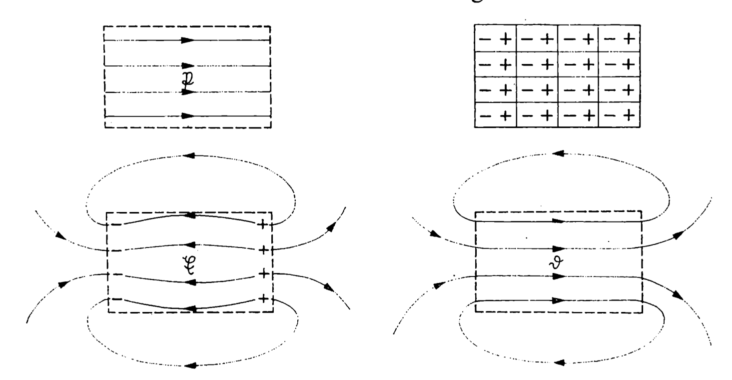


Abb. 286. $\mathfrak{E}$- und $\mathfrak{D}$-Feld eines Elektrets

In der Fachliteratur wird viel darüber diskutiert, ob der Vektor $\mathfrak{E}$ oder der Vektor $\mathfrak{D}$ einer physikalischen Größe direkt entspricht. Richtiger formuliert wird die Frage gestellt: Welcher Vektor ist bei der Beschreibung des Feldes enger mit den Gesetzmäßigkeiten des elektrostatischen Feldes verknüpft? Selbstverständlich sind beide Vektoren meßbar und demnach zwei völlig gleichberechtigte physikalische Größen, soweit man sie für Rechnungen oder Beschreibungen gebraucht. Wenn man aber das Feld nicht nur makroskopisch beschreiben, sondern vielmehr durch die atomistische Struktur des Stoffes erklären will, so überzeugt uns ein Blick auf Abb. 286, daß das $\mathfrak{E}$-Feld einen eindeutig bestimmten, auch im Innern des Stoffes gut meßbaren Sinn und Wert besitzt, hingegen das $\mathfrak{D}$-Feld in atomaren Dimensionen nur eine mathematische Hilfsgröße darstellt, deren einzige Berechtigung darin besteht, daß ihre Quellen mit den wahren Ladungen in unmittelbarem Zusammenhang stehen. Daß das $\mathfrak{D}$-Feld nicht mit dem $\mathfrak{E}$-Feld identifiziert werden kann, folgt aus der Tatsache, daß $\mathfrak{D}$ im allgemeinen ein Wirbelfeld darstellt.

Dieses Beispiel zeigt sehr deutlich, daß die Beziehung $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$ nur spezielle Gültigkeit besitzt und nur dann richtig ist, wenn $\mathfrak{P}$ proportional zu $\mathfrak{E}$ ist. Hier ist $\mathfrak{P}$ eine unabhängige Konstante, und die entstehende Feldstärke $\mathfrak{E}$ gemäß Abb. 286 zu $\mathfrak{P}$ genau entgegengesetzt. Durch die vektorielle Resultierende von $\varepsilon\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{P}$ ist dann auch im Innern des Isolators die Größe $\mathfrak{D}$ bestimmt.

5.15. Die Piezoelektrizität

Man kann einen Kristall auch dadurch permanent polarisieren, daß man eine mechanische Spannung an ihn legt. Man führt in dem in der Abb. 287 dargestellten Quarzkristall einen X-Schnitt vertikal zur x-Achse aus, wie die

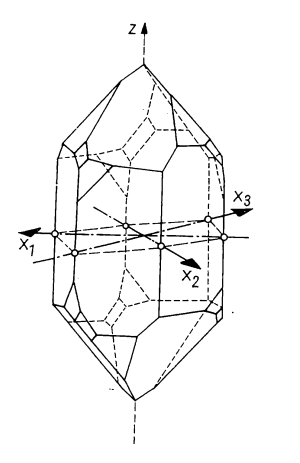



Abb. 287. Quarzkristall

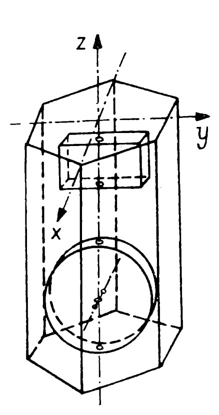


Abb. 288. Eckiger und kreisplattenförmiger X-Schnitt

Abb. 288 zeigt. Dann entstehen auf der yz-Fläche Ladungen, falls man senkrecht zu dieser Fläche eine Kraft F wirken läßt, gemäß der Beziehung

$$Q = -d_{11}F,$$

wobei F die auf die Oberfläche wirkende Gesamtkraft und Q die auf der Oberfläche erscheinende Gesamtladung bedeuten (Abb. 289). F ist positiv, wenn seine

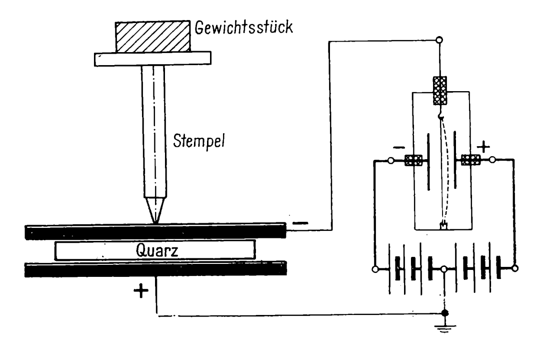


Abb. 289. Messung des longitudinalen piezoelektrischen Effekts mit den drei X- oder Piezoachsen (nach GRIMSEHL)

Richtung mit der positiven Richtung der x-Achse zusammenfällt. Der Zahlenwert von d_{11} beträgt $2{,}3 \cdot 10^{-12}$ C/N. Die hier beschriebene Erscheinung heißt longitudinaler piezoelektrischer Effekt.

Wenn nach Abb. 290 der Kristall in Richtung der y-Achse zusammengedrückt oder gedehnt wird, erscheint in der yz-Ebene eine Ladung

$$Q = d_{12} F \frac{l}{d},$$

wobei der Zahlenwert von d_{12} mit d_{11} übereinstimmt.

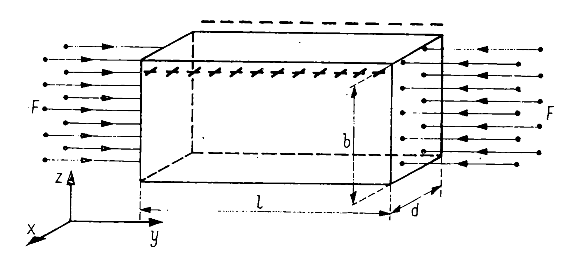


Abb. 290. Transversaler piezoelektrischer Effekt

Falls umgekehrt Ladungen auf die entsprechend geschnittenen Kristallplatten gebracht werden, d. h., in ihrem Innern ein elektrisches Feld erzeugt wird, verlängern oder verkürzen sie sich in der Richtung der x- bzw. y-Achse entsprechend den Gleichungen

$$\delta_x = d_{11} U,$$

$$\delta_y = d_{12} U \frac{l}{d},$$

wobei U die Spannungsdifferenz zwischen den beiden zur x-Achse senkrechten Flächen bedeutet, und δ_x, δ_y die in Richtung der x- bzw. y-Achse gemessenen Längenänderungen und d_{11} und d_{12} mit den bereits gegebenen Konstanten identische Größen bedeuten. Ebenso wie sich das Vorzeichen der Ladungen beim Übergang von Druck auf Zug ändert, ändert sich beim reziproken piezoelektrischen Effekt das Vorzeichen der Ladungen mit dem Übergang von Kontraktion in Dilatation.

Die Piezoelektrizität wird in der Praxis zur Messung von Kräften und Drücken verwendet, die reziproke Erscheinung u. a. zur Stabilisierung von Frequenzen, beim Bau von Quarzuhren usw.

5.16. Kristalline Dielektrika

Kristalle besitzen ausgeprägte Vorzugsrichtungen, die Kristallachsen. Man kann daher nicht voraussetzen, daß sie auf beliebig gerichtete elektrische Felder in gleicher Weise reagieren.

Im Innern eines Kristalls sei ein Koordinatensystem gemäß Abb. 291 errichtet, und es ist zu untersuchen, was geschieht, wenn man den Kristall in ein zur x-Achse paralleles Feld bringt. Es soll hierzu ein planparalleles Plättchen

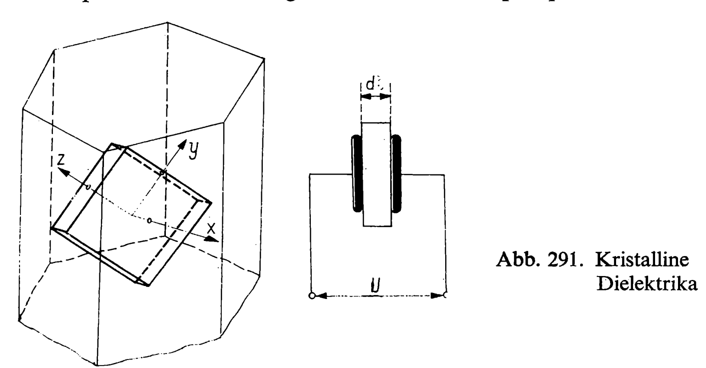


Abb. 291. Kristalline Dielektrika

der Dicke d senkrecht zur x-Achse aus dem Kristall geschnitten und diese Platte zwischen die Platten eines Kondensators gebracht werden. An die Platten wird eine Spannung U gelegt und so ein elektrisches Feld $E = U/d$ erzeugt, das in die Richtung der x-Achse zeigt. Wenn man nun mit Hilfe eines in den Kristall geschnittenen Spaltes wenigstens prinzipiell die Größe und Richtung des Vektors $\mathfrak{D}$ bestimmt, wird man finden, daß er nicht in der Richtung der Feldstärke $\mathfrak{E}$ liegt, also nicht nur eine Komponente in der x-Richtung besitzt, sondern auch Komponenten in der y- und z-Richtung. Wie die Experimente zeigen, ist jede Komponente proportional E, doch ist der Proportionalitätsfaktor in jeder Richtung ein anderer:

$$D_x = \varepsilon_{11}E_x, \quad D_y = \varepsilon_{21}E_x, \quad D_z = \varepsilon_{31}E_x.$$

Schneidet man jetzt aus dem Kristall eine Platte der Dicke d vertikal zur y-Achse aus und legt die Platte in den Kondensator, dann erhält man allgemein wieder einen von der Richtung von $\mathfrak{E}$ abweichenden Vektor $\mathfrak{D}$ mit den Komponenten

$$D_x = \varepsilon_{12}E_y, \quad D_y = \varepsilon_{22}E_y, \quad D_z = \varepsilon_{32}E_y.$$

Die Komponenten des Verschiebungsvektors $\mathfrak{D}$, welche von der Feldstärke in z-Richtung erzeugt werden, lauten ganz ähnlich:

$$D_x = \varepsilon_{13}E_z, \quad D_y = \varepsilon_{23}E_z, \quad D_z = \varepsilon_{33}E_z.$$

Wenn also im Kristall die Feldstärke $\mathfrak{E}(E_x, E_y, E_z)$ herrscht, gehört zu dieser im Sinne der Überlagerung der Verschiebungsvektor $\mathfrak{D}$ mit den Komponenten

$$D_x = \varepsilon_{11}E_x + \varepsilon_{12}E_y + \varepsilon_{13}E_z,$$
$$D_y = \varepsilon_{21}E_x + \varepsilon_{22}E_y + \varepsilon_{23}E_z,$$
$$D_z = \varepsilon_{31}E_x + \varepsilon_{32}E_y + \varepsilon_{33}E_z.$$

Den Versuchsergebnissen kann man entnehmen, daß

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$$

sind.

Der Verschiebungsvektor $\mathfrak{D}$ ist demnach eine lineare Vektorfunktion der Feldstärke $\mathfrak{E}$, und ε ist bei Kristallen kein Skalar, sondern ein symmetrischer Tensor:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{T}_\varepsilon \mathfrak{E}.$$

Man kann auch auf einem anderen, der Meßmöglichkeit gemäßeren Weg zum Begriff des ε-Tensors gelangen. Gleichzeitig führt uns diese Messung auch die praktische Anwendung der quadratischen Form vor Augen, die in der Tensortheorie eine so wichtige Rolle spielt.

In einem beliebig angenommenen Koordinatensystem x, y, z soll eine beliebig orientierte Kristallplatte ausgeschnitten werden, deren Normalenvektor $\mathfrak{n}$ ein Einheitsvektor ist. Man lege diese Platte in einen Kondensator und lege die Spannung U an, wodurch eine dem Vektor $\mathfrak{n}$ parallele Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \frac{U}{d}\mathfrak{n}^0$$

erzeugt wird.

Nun wird mit Hilfe eines ballistischen Galvanometers die Ladung des Kondensators gemessen. Sie sei σ_n. Der Index n bedeutet, daß diese Ladung zur Feldstärke in der Richtung $\mathfrak{n}$ gehört. Es ist bekannt, daß diese Ladung gleich der Normalkomponente des Vektors $\mathfrak{D}_n$ ist:

$$D_n = \mathfrak{D}\mathfrak{n}^0 = \sigma_n.$$

Dieser Zusammenhang kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\sigma_n = \mathfrak{D}\mathfrak{E}\frac{d}{U} = \frac{d}{U}\mathfrak{E}\mathfrak{D}.$$

Wenn man die Feldstärke auf 1 normiert, d. h. dem Zahlenwert nach U gleich d macht, wird

$$\sigma_n = \mathfrak{E}\mathfrak{D}.$$

Nun sollen die zu den verschiedenen $\mathfrak{n}$-Richtungen gehörenden Werte σ_n in den verschiedenen Richtungen $\mathfrak{n}$ aufgetragen werden, wobei es wichtig ist, daß U und d immer konstant gehalten werden. Es wird sich herausstellen, daß die so erhaltenen Punkte auf einem Ellipsoid liegen, welches im allgemeinen drei verschiedene Achsen besitzt. Hieraus folgt, daß die Verschiebung $\mathfrak{D}$ eine homogene Vektorfunktion der Feldstärke $\mathfrak{E}$ ist und daß den Wert von σ_n die auf der Einheitskugel angenommenen Werte der quadratischen Form $\mathfrak{E}\mathfrak{D} = \mathfrak{E}\mathfrak{T}_\varepsilon\mathfrak{E}$ ergeben:

$$\sigma_n = \mathfrak{E}\mathfrak{T}_\varepsilon\mathfrak{E}.$$

In der Richtung der durch die Messungen festgestellten maximalen Ladung $\sigma_n^{\max}$ liegt die eine Hauptachse, zwischen den darauf senkrechten Richtungen n ergibt das Maximum der Werte σ_n die zweite Hauptachse, die dritte steht dann auf beiden senkrecht. In der Richtung des zu der jeweiligen Hauptachse senkrechten Schnittes stimmt die Richtung von $\mathfrak{E}$ mit der von $\mathfrak{D}$ überein:

$$\mathfrak{D}^{(1)} = \varepsilon_1\mathfrak{E}^{(1)},$$

$$\mathfrak{D}^{(2)} = \varepsilon_2\mathfrak{E}^{(2)},$$

$$\mathfrak{D}^{(3)} = \varepsilon_3\mathfrak{E}^{(3)}.$$

Wählt man die Richtungen der Hauptachsen als Koordinatenachsen, erhält man

$$D_x = \varepsilon_1 E_x,$$

$$D_y = \varepsilon_2 E_y,$$

$$D_z = \varepsilon_3 E_z.$$

Die Richtung von $\mathfrak{E}$ kann also mit der von $\mathfrak{D}$ nur dann übereinstimmen, wenn $\mathfrak{E}$ in einer Hauptachse liegt, also wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ist, was so viel bedeutet, daß der Stoff dann isotrop und nicht kristallin ist.

Man kann leicht ein Modell angeben, das die Richtungsabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten demonstriert. Bekanntlich kann man sich die eine Art von Dielektrika so vorstellen, daß das Dielektrikum im feldfreien Raum aus neutralen Molekülen besteht, die kein permanentes Dipolmoment besitzen, deren Schwerpunkte der negativen und positiven Ladungen demnach zusammenfallen. Es wurde bereits gezeigt, daß die Ladungen in diesem Zustand quasielastisch gebunden sind, d. h. mit Kräften, zu deren Überwindung bei kleiner Verschiebung eine der Verschiebungsstrecke proportionale Kraft notwendig ist. Wenn wir diese Vorstellung beibehalten, müssen wir bei Kristallen das Bild

nur insoweit abändern, als die zum Gleichgewicht gemäß Abb. 292 notwendigen drei Federpaare verschiedene Federcharakteristiken besitzen. Das eine kann leicht, das zweite schwerer und das dritte nur sehr schwer zusammengedrückt

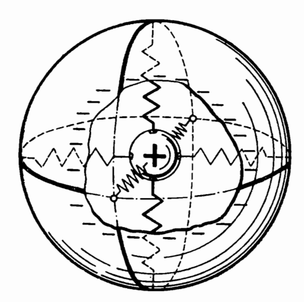


Abb. 292. Modell des Kristalls

werden. Wirkt die Feldstärke parallel zum ersten Federpaar, so erfolgt die Bewegung senkrecht zu den Achsen der beiden anderen, diese dehnen sich bei kleinen Auslenkungen nicht und üben somit auch keine Wirkung aus, d. h., der Polarisationsvektor $\mathfrak{P}$ wird ein dem Feldstärkevektor $\mathfrak{E}$ kollinearer Vektor sein. Dies ist die eine Hauptachse des Kristalls. Die in Richtung der beiden anderen Federn auftretenden Feldstärken ergeben ebenfalls je einen $\mathfrak{E}$-parallelen Vektor $\mathfrak{P}$, doch mit anderen Proportionalitätsfaktoren, da wegen der verschieden starken Federn auch bei identischen Feldstärken der Schwerpunkt verschieden weit ausgelenkt wird. Wenn jetzt, wie es die Abb. 293 zeigt, die

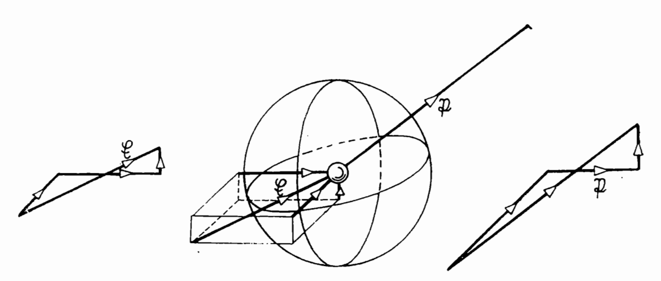


Abb. 293. Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{P}$

Feldstärke in einer beliebigen Richtung wirkt, so kann man diese in Richtung der drei Hauptachsen zerlegen. Jede Komponente bringt nach einer anderen Proportion ihre Dipolkomponente zustande, und so stimmt die Resultierende des Dipols nicht mit der Richtung der Feldstärke $\mathfrak{E}$ überein. Demzufolge wird der mit der Gleichung $\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E} + \mathfrak{P}$ bestimmte Vektor $\mathfrak{D}$ auch nicht die gleiche Richtung wie der Vektor $\mathfrak{E}$ besitzen.

Anschließend soll noch die Kapazität des Kondensators bestimmt werden, wenn in diesen eine senkrecht zu einer beliebigen Richtung $\mathfrak{n}$ geschnittene Kristallplatte gebracht wird. Die wahre Flächenladungsdichte des Kondensators ist bekanntlich

$$\sigma_n = \frac{Q}{A} = \mathfrak{n}\mathfrak{D} = \mathfrak{n}\,\mathfrak{T}_\varepsilon\mathfrak{E} = \mathfrak{n}\,\mathfrak{T}_\varepsilon \frac{U}{d}\,\mathfrak{n} = \frac{U}{d}\,\mathfrak{n}\mathfrak{T}_\varepsilon\mathfrak{n}.$$

Damit ergibt sich für die Kapazität des Kondensators

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{A}{d}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{T}_\varepsilon\mathfrak{n}.$$

Die Projektion des Einheitsvektors $\mathfrak{n}$ auf die Hauptrichtungen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ habe die Komponenten $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{n}\mathfrak{T}_\varepsilon\mathfrak{n} &= (\cos\alpha\ \mathfrak{i} + \cos\beta\ \mathfrak{j} + \cos\gamma\ \mathfrak{k})\,(\varepsilon_1 \cos\alpha\ \mathfrak{i} + \varepsilon_2 \cos\beta\ \mathfrak{j} + \varepsilon_3 \cos\gamma\ \mathfrak{k}) \\ &= \varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma\end{aligned}$$

und die Kapazität des Kondensators

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{A}{d}(\varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma).$$

Dieser Kapazitätswert hängt natürlich stark von der Richtung $\mathfrak{n}$ ab. Wenn diese der Reihenfolge nach mit den als Hauptrichtungen gewählten Richtungen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ übereinstimmt, erhalten wir die Kapazitätswerte

$$C_1 = \frac{A\varepsilon_1}{d}, \quad C_2 = \frac{A\varepsilon_2}{d}, \quad C_3 = \frac{A\varepsilon_3}{d}.$$

Sowohl in einem homogenen Medium als auch in Stoffen permanenter Polarisation und in Kristallen haben der Feldstärkevektor $\mathfrak{E}$ und der Polarisationsvektor $\mathfrak{P}$ eine anschauliche, wohldefinierte Bedeutung. Als Resultierende der beiden ergibt sich aus der allgemeinen Definitionsgleichung

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0\mathfrak{E} + \mathfrak{P}$$

der Vektor $\mathfrak{D}$, der als Rechengröße eine sehr große Bedeutung besitzt, denn seine Divergenz steht mit der wahren Ladungsdichte in unmittelbarem Zusammenhang. Die Beziehung zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{E}$ ist linear: entweder ein Skalar oder ein Tensor. Es ist natürlich, daß solche linearen Zusammenhänge in der Natur nur eine erste Näherung bedeuten und eigentlich nur bei kleinen Ladungsverschiebungen, also bei kleinen Feldstärken, gültig sind. Wie wenig

dies im allgemeinen zutrifft, läßt sich leicht einsehen, wenn man bedenkt, daß das Dipolmoment eines makroskopischen Volumens polarer Moleküle so entsteht, daß durch das äußere Feld die vorhandenen, noch ungeordneten molekularen Dipole geordnet werden. Man kann keinen größeren $\mathfrak{P}$-Wert erhalten als den, der sich für den vollkommen geordneten, parallel ausgerichteten Zustand ergibt, unabhängig von der Größe des wirkenden äußeren Feldes. Der Betrag von $\mathfrak{P}$ nähert sich demnach einem Sättigungswert. In der Praxis wird seine $\mathfrak{E}$-Abhängigkeit trotzdem als linear angenommen, weil der Sättigungswert für $\mathfrak{P}$ in den meisten Fällen erst bei sehr großen Feldstärken auftritt, wo aus anderen Gründen schon ein Durchschlag erfolgt sein muß. Diese Sättigungserscheinung, d. h. die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von der Feldstärke, kann jedoch im Falle der Ferroelektrizität bei einzelnen Stoffen, wie schon besprochen, bereits gut beobachtet werden.

Das magnetische Feld im stofferfüllten Raum

5.17. Die magnetische Permeabilität

Füllt man den Raum, in dem ein magnetisches Feld existiert, mit verschiedenen Stoffen aus, so ändert sich die magnetische Induktion nach Maßgabe der Art des Stoffes. Beim Biot-Savartschen Gesetz oder beim Erregungsgesetz, die beide einen Zusammenhang zwischen den Strömen und dem durch sie erzeugten magnetischen Feld bestimmen, tritt eine Materiekonstante auf, die von dem das Feld ausfüllenden Stoff abhängt. An die Stelle der magnetischen Permeabilität des Vakuums tritt die magnetische Permeabilität des betreffenden Stoffes. Das Erregungsgesetz lautet dann, vorausgesetzt, daß der ganze Raum homogen mit Materie ausgefüllt ist,

$$\oint_L \mathfrak{B}\, d\mathfrak{l} = \mu \int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A}, \tag{5.17.1}$$

wobei μ die Permeabilität des betreffenden Stoffes bedeutet. Diese magnetische Permeabilität pflegt auch in der Form

$$\mu = \mu_0 \mu_r \tag{5.17.2}$$

geschrieben zu werden. μ_r wird relative Permeabilität des betreffenden Stoffes genannt.

Führt man die magnetische Feldstärke durch

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{B}}{\mu} \tag{5.17.3}$$

ein, so hat im materiegefüllten Raum das Erregungsgesetz dieselbe Form wie im Vakuum:

$$\oint_L \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A}. \tag{5.17.4}$$

Die magnetische Permeabilität kann aus der Definitionsgleichung (5.17.3) bestimmt werden, indem die zusammengehörenden Werte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ gemessen und ins Verhältnis zueinander gesetzt werden. Es muß für solche Versuchsbedingungen gesorgt sein, die die Größen $\mathfrak{B}$ sowie $\mathfrak{H}$ einfach zu messen gestatten. Wir wissen, daß die Messung der magnetischen Feldstärke in einer ringförmigen Spule auf die Messung des Stromes, welcher in der Spule fließt, und auf die Messung der mittleren Kraftlinienlänge zurückgeführt werden kann. Der Wert der in der inneren Spule auftretenden Induktion wird mit Hilfe eines ballistischen Galvanometers gemessen, wie es in 4.5. bereits erörtert wurde. Der ringförmige Probekörper wird mit einer zweiten Wicklung versehen und mit einem ballistischen Galvanometer verbunden (Abb. 294). Von

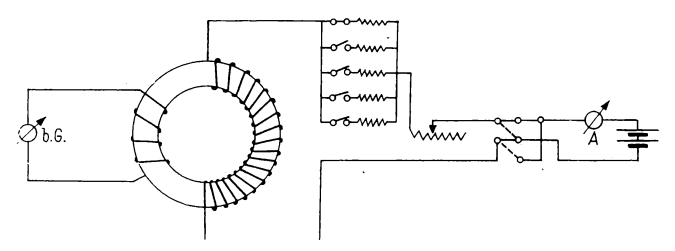


Abb. 294. Bestimmung der magnetischen Permeabilität

einem vollkommen entmagnetisierten Zustand ausgehend, wird der in der Spule fließende Strom durch Einschaltung von Widerständen sprunghaft erhöht. Die den einzelnen Stromänderungen zugeordneten Änderungen der Induktion werden dann am ballistischen Galvanometer abgelesen. Die Summe der Stromänderungen ergibt den Strom und damit die Feldstärke $\mathfrak{H}$, die Summe der Änderungen der Induktion liefert die gesamte Induktion $\mathfrak{B}$. Die zusammengehörenden Werte $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ ergeben die Magnetisierungskurve.

Es sollen nun Probekörper aus verschiedenen Materialien hergestellt und dann die magnetische Permeabilität bei verschiedenen Stromstärken, d. h. bei verschiedenen magnetischen Feldstärken, gemessen werden. Neben diese in der Technik sehr oft angewandte Meßmethode sind natürlich viele andere mehr oder weniger exakte Methoden zur Messung der Eigenschaften magnetischer Stoffe getreten. Eine physikalische Methode wird später noch besprochen werden.

Auf Grund der Messungen können die Stoffe in bezug auf ihre magnetischen Eigenschaften in drei große Gruppen eingeteilt werden, in paramagnetische, diamagnetische und ferromagnetische Stoffe (Abb. 295).

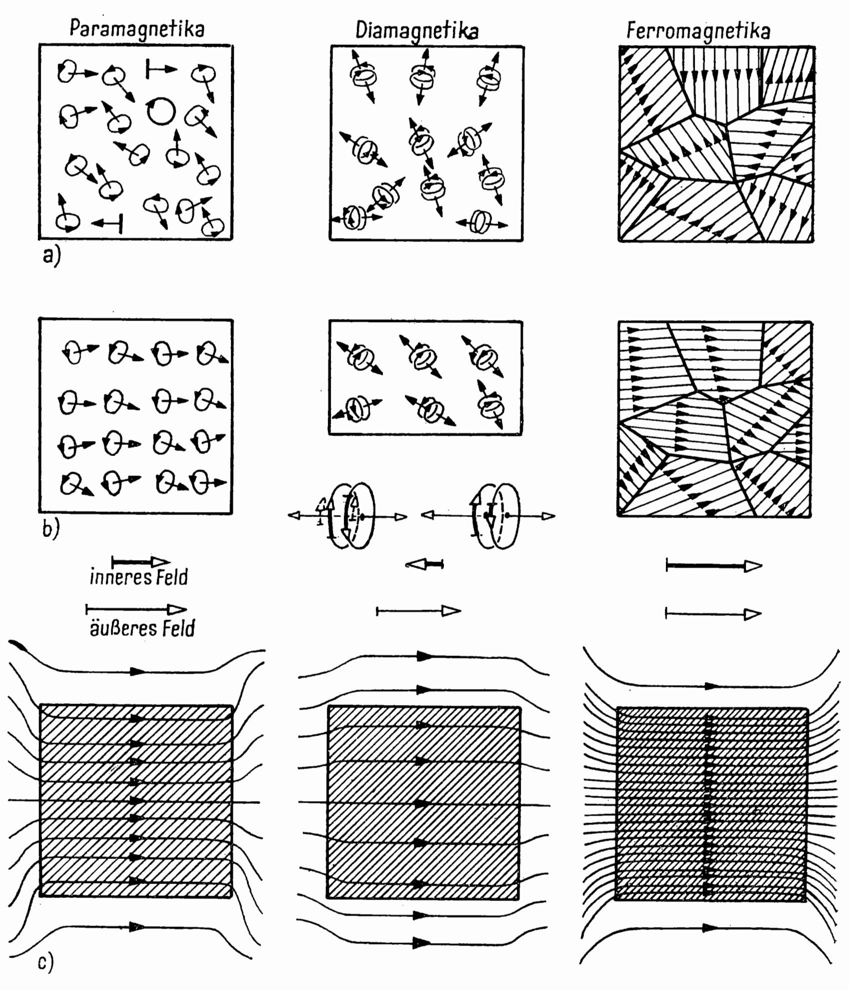


Abb. 295. Paramagnetische, diamagnetische und ferromagnetische Stoffe

Die Permeabilität der paramagnetischen Stoffe ist von der Induktion $\mathfrak{B}$ unabhängig und konstant. Die im Koordinatensystem $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ gezeichnete Magnetisierungskurve $\mathfrak{B} = \mu_0 \mu_r \mathfrak{H}$ ist demnach eine Gerade. Die relative Permeabilität μ_r ist kaum größer als 1. Paramagnetische Stoffe sind z. B.

Sauerstoff, Platin, Mangan. Man stellt sich vor, daß die Moleküle eines paramagnetischen Stoffes auch im Fall eines feldlosen Zustandes ein magnetisches Moment besitzen und daß sie vom Gesichtspunkt des Magnetismus als kleine Kreisströme betrachtet werden können. Im entmagnetisierten Zustand sind sie in den verschiedensten Richtungen statistisch verteilt, wodurch sich ihre magnetischen Wirkungen nach außen hin aufheben. In einem äußeren magnetischen Feld orientieren sich die magnetischen Momente dieser molekularen Kreisströme in Richtung der äußeren magnetischen Feldstärke. Ihr resultierendes magnetisches Feld wird dadurch das äußere Feld verstärken.

Die Permeabilität der diamagnetischen Stoffe ist gleichfalls konstant, jedoch kleiner als 1. Diese Stoffe verringern also die Induktion gegenüber der am selben Ort im Vakuum gemessenen Induktion. Im feldlosen Zustand ist das resultierende magnetische Moment der Moleküle diamagnetischer Stoffe gleich Null. Beim Einschalten des Feldes wird in den molekularen Stromkreisen (Abb. 295b), die normalerweise ein gleichgroßes, doch entgegengesetzt gerichtetes magnetisches Moment besitzen, eine Spannung induziert, die den Strom des einen Kreises verstärkt, den des anderen jedoch derart schwächt, daß man resultierend ein gegen das äußere gerichtetes Feld erhält.

Diese diamagnetische Wirkung tritt auch bei paramagnetischen Stoffen auf, jedoch wird diese Wirkung durch die Feldverstärkung der parallelgestellten molekularen Kreisströme überkompensiert. Wasserstoff, Wasser, Gold, Wismut sind Beispiele für diamagnetische Stoffe.

Für die Technik am bedeutsamsten sind die ferromagnetischen Stoffe. Sie zeichnen sich durch eine sehr große Permeabilität aus. Die relative Permeabilität der in der Technik im allgemeinen verwendeten Werkstoffe beträgt einige Tausend, doch findet man bei Spezialstoffen auch Werte von einer Million. Weiter ist für die ferromagnetischen Stoffe kennzeichnend, daß ihre Permeabilität sehr stark von der Induktion sowie von der magnetischen Vorgeschichte des Stoffes abhängt.

Beim Entstehen des resultierenden Feldes ferromagnetischer Stoffe spielt nicht direkt das magnetische Moment der Moleküle bzw. Atome eine Rolle, vielmehr sind einzelne Gebiete der Kristalle dieser Stoffe bereits von vornherein magnetisiert. Bei nichtmagnetisierten ferromagnetischen Stoffen sind diese magnetisierten Gebiete vollkommen regellos nach sämtlichen möglichen Richtungen orientiert (Abb. 295). Bei der Magnetisierung treten ziemlich komplizierte Erscheinungen auf, die folgendermaßen schematisiert werden können. Im äußeren Feld stellt sich ein Gebiet als Ganzes sprunghaft in eine der Richtung der magnetischen Feldstärke näher liegende Richtung ein. Wenn

die Feldstärke weiter erhöht wird, stellen sich nacheinander sämtliche elementaren Gebiete in stetig wachsender Zahl und immer genauer in die Richtung der magnetischen Feldstärke ein.

Im folgenden wird jedoch auch bei den ferromagnetischen Stoffen der Einfachheit halber von starken molekularen Kreisströmen gesprochen werden.

Trägt man jetzt die Induktion als Funktion der Feldstärke auf, so findet man, daß mit wachsendem $\mathfrak{H}$ die Induktion zunehmend stärker anwächst, bis bei großer Feldstärke alle elementaren Kreisströme sich mehr oder weniger in die Richtung der Feldstärke eingestellt haben. Dann bedingt eine weitere Erhöhung der Feldstärke nurmehr eine kleine Zunahme der Induktion (Abb. 296a). Im sogenannten Sättigungsgebiet, in dem sich sämtliche elementaren Kreisströme in die Richtung der Feldstärke eingestellt haben, kann die magnetische Induktion durch die weitere Erhöhung der Feldstärke nur noch in dem Maße erhöht werden, wie dies auch im Vakuum möglich ist. Entsprechend diesem Verhalten beginnt die Permeabilitätskurve mit einem Anfangswert μ_k, geht durch ein Maximum und nähert sich mit größer werdender Induktion immer mehr dem Wert der Permeabilität des Vakuums (Abb. 296b).

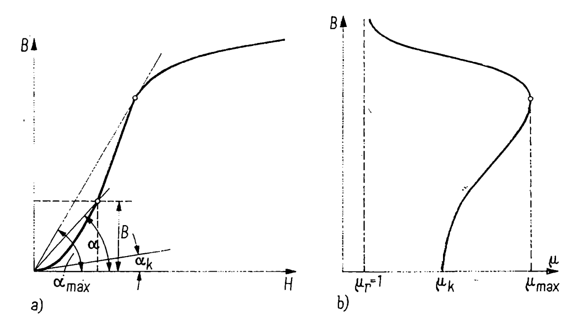


Abb. 296. Magnetisierungskurve und Permeabilität

Die Abb. 297 und 298 zeigen die Magnetisierungskurven einiger in der Praxis verwendeter Werkstoffe. Diese Kurven werden Neukurven oder jungfräuliche Magnetisierungskurven genannt, da vorausgesetzt wird, daß beim Ausgangspunkt, d. h. bei der magnetisierenden Feldstärke Null, auch die Stärke der magnetischen Induktion gleich Null ist.

Geht man jetzt mit der in der Erregerspule fließenden Stromstärke wieder herunter, so beginnt sich das gesättigte Material zu entmagnetisieren (Abb. 299 und Abb. 300), wobei jedoch die absteigende Kurve einen von der aufsteigenden Kurve abweichenden Verlauf hat. Erreicht dabei die äußere Feldstärke den Wert Null, so kann noch immer eine Induktion gemessen werden. Dieser bei $H = 0$ erreichte Induktionswert B_r wird Remanenz genannt. Wenn man

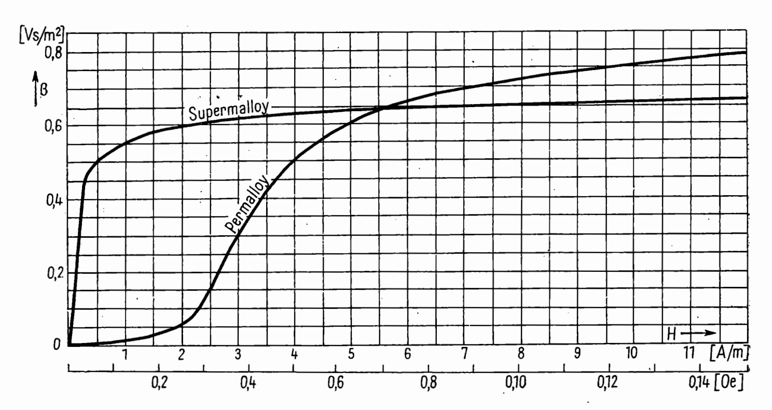


Abb. 297. Magnetisierungskurve von Stoffen großer Permeabilität

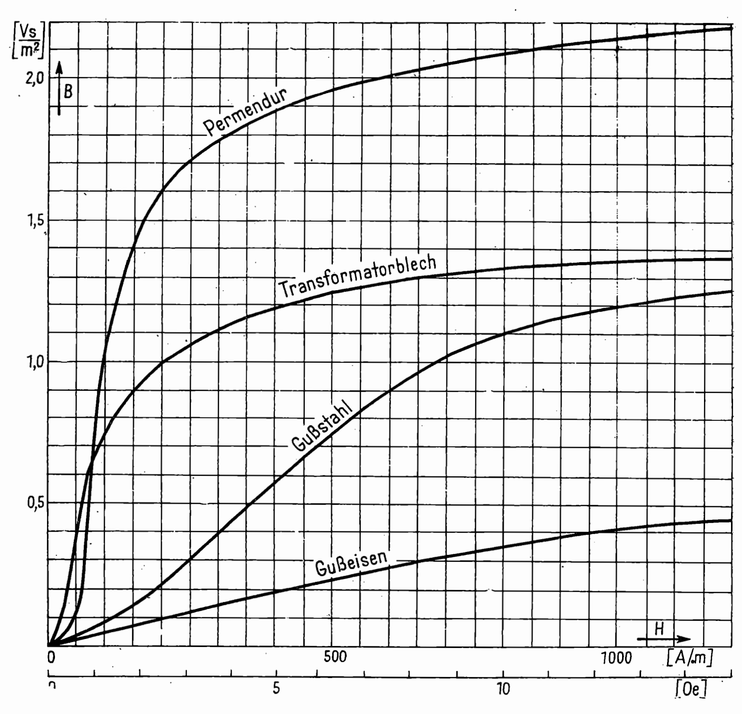


Abb. 298. Magnetisierungskurve einiger wichtiger Werkstoffe

nunmehr in der entgegengesetzten Richtung magnetisiert, d. h. die Stromrichtung in der Spule umkehrt, so vermindert sich die Induktion weiter, bis bei einer bestimmten magnetisierenden Feldstärke die Induktion Null geworden ist. Diese Feldstärke wird Koerzitivkraft des betreffenden Materials genannt und mit H_c bezeichnet.

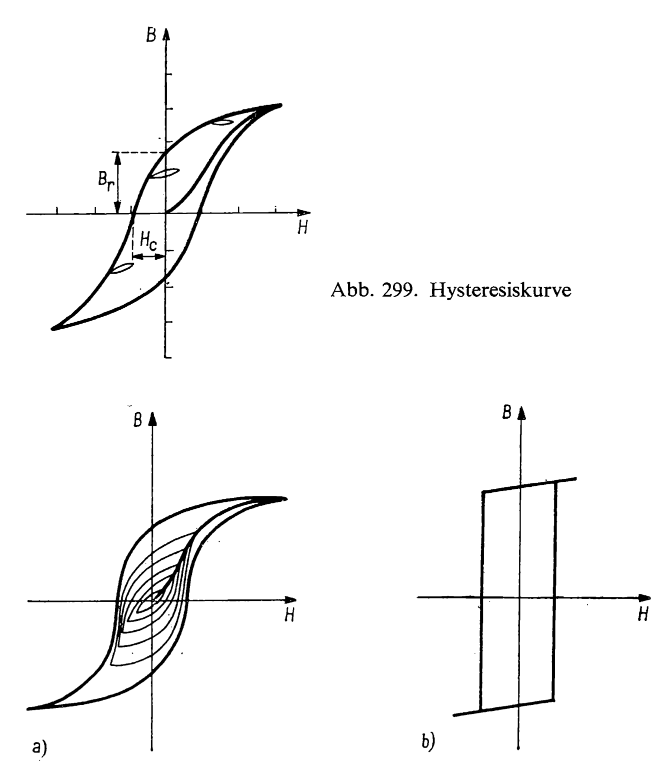


Abb. 299. Hysteresiskurve

Abb. 300. a) Hysteresiskurve und Neukurve; b) Hysteresiskurve eines Einkristalls

Wenn in dieser Richtung bis zum Sättigungspunkt weitermagnetisiert und durch Ändern der Stromrichtung wieder entmagnetisiert wird, bekommt man die vollständige Magnetisierungskurve oder Hysteresiskurve. Magnetisierungskurven verschiedener in der Praxis verwendeter Werkstoffe zeigt die Abb. 301.

Der Ferromagnetismus, der weitgehend vom strukturellen Aufbau der Stoffe abhängt, wird durch die Herstellungsart der betreffenden Legierung, die Wärmebehandlung und die Legierungsbestandteile stark beeinflußt. Er hängt auch von der Temperatur ab, denn von einer gewissen Grenztemperatur ab verliert das Material seine ferromagnetischen Eigenschaften und verhält sich

wie ein paramagnetischer Stoff. Die dadurch gekennzeichnete Temperatur nennt man den CURIE-Punkt. Der CURIE-Punkt des Eisens liegt bei 769 °C, der des Nickels bei 356 °C und der des Kobalts bei 1075 °C. Man kann sich

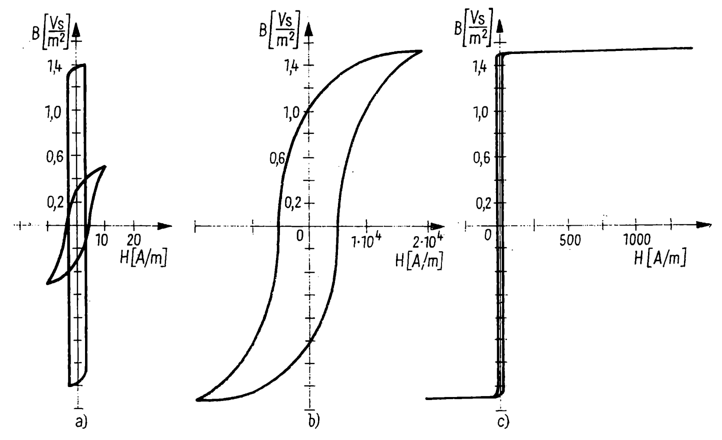


Abb. 301. Hysteresiskurven
a) bei häufiger Durchmagnetisierung soll die Hysteresiskurve schmal und steil sein; b) Permanentmagnete erfordern große Remanenz und Koerzitivkraft; c) für magnetische Verstärker, Speicherelemente usw. benötigt man eine rechteckförmige Hysteresiskurve

den Sachverhalt etwa so vorstellen, daß oberhalb des CURIE-Punktes ein äußeres Feld wie bei den paramagnetischen Stoffen die magnetischen Momente der einzelnen Atome gegen die regellose Wärmebewegung parallel zu stellen trachtet. Es ist dann verständlich, daß die Permeabilität mit abnehmender Temperatur wächst. Beim CURIE-Punkt entstehen durch die Wirkung struktureller Kräfte die spontan magnetisierten Gebiete, welche sich dann in die Richtung der äußeren Feldstärke einstellen. So erhöht sich die Permeabilität bei Erreichen des ferromagnetischen Zustandes sprunghaft, hängt aber dabei stark von der magnetischen Feldstärke ab. Den schematischen Verlauf der Permeabilität als Funktion der Temperatur bei para- bzw. ferromagnetischen Stoffen zeigt die Abb. 302.

In den letzten Jahren stehen im Vordergrund der experimentellen und theoretischen Untersuchungen die sogenannten antiferromagnetischen Stoffe, z. B. FeF_2, MnO, FeO.

Die Permeabilität dieser Stoffe wächst mit sinkender Temperatur bis zu einem antiferromagnetischen CURIE-Punkt so an wie die der paramagnetischen Stoffe. Darunter sinkt sie dann wieder, abhängig von der Feldintensität, wie es Abb. 303 zeigt. Man kann diese Erscheinung qualitativ erklären, wenn man

annimmt, daß in diesen Stoffen beim CURIE-Punkt eine spontane Magnetisierung auftritt, die sich *gegen* das äußere Feld einstellt.

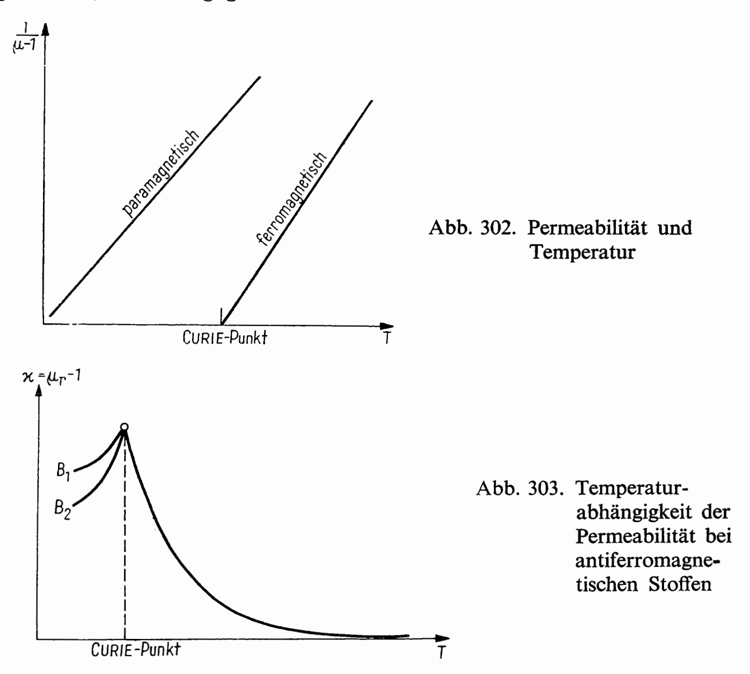


Abb. 302. Permeabilität und Temperatur

Abb. 303. Temperaturabhängigkeit der Permeabilität bei antiferromagnetischen Stoffen

Zwischen den ferromagnetischen und antiferromagnetischen Stoffen befinden sich vom theoretischen Standpunkt aus die ferrimagnetischen Stoffe. Diese sind so aufgebaut wie die Magnetite, jedoch mit dem Unterschied, daß in der Formel $FeOFe_2O_3$ die Fe-Atome durch andere zweiwertige Metallatome ersetzt sind, z. B. $CoOFe_2O_3$. Diese Stoffe zeichnen sich durch einen sehr hohen elektrischen Widerstand aus („magnetische Isolierstoffe"). In erster Linie werden sie in Hochfrequenzfeldern benutzt, wo ihre gyromagnetischen Eigenschaften neue Anwendungsmöglichkeiten bieten.

5.18. Das Erregungsgesetz in Stoffen mit inhomogener Permeabilität

Wir konnten zeigen, daß im stofferfüllten Raum das Erregungsgesetz bei Einführung der Feldstärke

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{B}}{\mu}$$

die gleiche Form wie im Vakuum annimmt. Die so definierte magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ ist durch die Gleichung

$$\oint_L \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A} \tag{5.18.1}$$

bzw. durch die differentielle Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G} \tag{5.18.2}$$

mit dem äußeren Erregungsstrom verknüpft, vorausgesetzt, daß der ganze Raum von einem Stoff homogen ausgefüllt wird. Man kann daher sagen, daß die relative Permeabilität das Verhältnis der nach Einführung der Materie gemessenen Induktion zur Induktion im leeren Raum ist. Es sei aber ausdrücklich betont, daß dies nur dann gilt, wenn der ganze Raum von dem betreffenden Stoff homogen ausgefüllt ist.

Wenn sich die Permeabilität im Feld von Ort zu Ort ändert, gleichgültig, ob sprunghaft oder kontinuierlich, so kann man auch in diesem Fall die Induktion mit Hilfe der Kraftwirkung oder des Induktionsgesetzes eindeutig messen. Beide Messungen müssen aus Gründen der Energieerhaltung dasselbe Resultat ergeben. Falls die Permeabilität in allen Punkten bekannt ist, kann man die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H} = \dfrac{\mathfrak{B}}{\mu}$ in jedem Punkt als Rechengröße definieren. Im folgenden werden wir für einige Beispiele versuchen, diesen experimentellen Sachverhalt mit Hilfe einer von der elektrischen Struktur der Materie gebildeten groben Vorstellung zu erklären, und zwar indem wir zeigen, daß das Linienintegral des so definierten Vektors $\mathfrak{H}$ ausschließlich von den makroskopischen, meßbaren Strömen abhängt, die von der Linie umschlossen sind, und nicht von den magnetischen Stoffen, welche sich im Raum befinden.

Aus dieser Tatsache wird oft die falsche Folgerung gezogen, daß das Feld $\mathfrak{H}$ ausschließlich von den Erregungsströmen abhängt und daß für seine Gestalt die vorhandenen magnetischen Stoffe keine Rolle spielen, also daß die Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Vakuum die gleiche ist, wie sie in Anwesenheit der verschiedenen Stoffe wäre. Dies ist natürlich nicht so, denn die makroskopischen Ströme bestimmen nur die Rotation von $\mathfrak{H}$ gemäß der Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G}.$$

Die Divergenz von $\mathfrak{H}$ wird sich jedoch als eine Funktion der Permeabilität erweisen, und die Größe $\mathfrak{H}$ ist dann durch beide Faktoren bestimmt. Nur wenn die Permeabilität im Feld konstant ist, genügt die Rotation von $\mathfrak{H}$ allein zur

Bestimmung von $\mathfrak{H}$, und $\mathfrak{H}$ kann eindeutig aus den äußeren Strömen berechnet werden. Die toroidförmige Spule hat deshalb eine so große theoretische und praktische Bedeutung, weil das ganz im Endlichen liegende Volumen mit dem Stoff homogen ausgefüllt und $\mathfrak{H}$ daher leicht berechnet werden kann.

Untersuchen wir zunächst etwas näher die Tatsache, daß die Induktion im Innern eines homogen stoffgefüllten Toroids gegenüber dem Vakuum den μ_r-fachen Wert hat. Die Induktion im stoffgefüllten Toroid ist

$$B = \mu \frac{NI}{l} = \mu H. \tag{5.18.3}$$

Im Vakuum hätte die Induktion bei gleicher magnetischer Feldstärke $\frac{NI}{l}$, d. h. bei gleicher magnetischer Erregung, den Wert

$$B_v = \mu_0 \frac{NI}{l}.$$

Für B können wir schreiben

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l} + (\mu - \mu_0) \frac{NI}{l} = \mu_0 \frac{NI}{l} + \mu_0(\mu_r - 1) \frac{NI}{l} \tag{5.18.4}$$

bzw. als Vektorgleichung

$$\mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{H} + \mu_0 (\mu_r - 1) \mathfrak{H}.$$

Die Größe

$$\mu_0 (\mu_r - 1) \mathfrak{H} = \mu_0 \varkappa \mathfrak{H} = \mathfrak{M}$$

nennt man die Magnetisierung des betreffenden Stoffes oder den Vektor der magnetischen Polarisation; $\varkappa$ ist die magnetische Suszeptibilität. Mit diesen Bezeichnungen ist

$$\mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{H} + \mathfrak{M}.$$

Die Gleichung (5.18.4) besagt, daß die größere Induktion im Innern des ferromagnetischen Stoffes gegenüber der im Vakuum dadurch entsteht, daß zur Erregung $\frac{NI}{l}$ des äußeren Stromes die Erregung der molekularen Kreisströme $(\mu_r - 1) \frac{NI}{l}$ hinzutritt (Abb. 304).

Da μ_r um vieles größer ist als 1, spielen bei der Entstehung der magnetischen Induktion die molekularen Kreisströme quantitativ eine unvergleichlich größere Rolle als der äußere Erregungsstrom, der sich hauptsächlich darauf beschränkt, das Parallelstellen der molekularen Kreisströme anfänglich zu unterstützen

(im Endergebnis hängt aber dieses Parallelstellen auch vom resultierenden Feld $\mathfrak{B}$ ab).

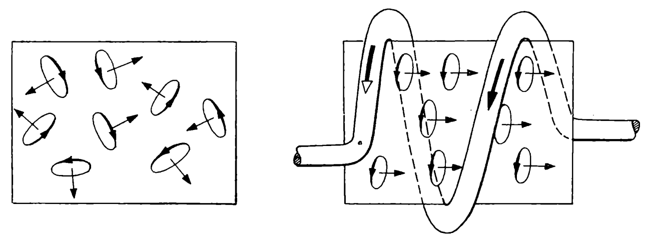


Abb. 304. Erregung der molekularen Kreisströme und äußere Erregung (nach KALANTAROW und NEIMAN)

Wenn z. B. $\mu_r = 5000$ ist, wird die Induktion im Verhältnis 4999 : 1 von den molekularen Kreisströmen erzeugt, und der äußere Erregungsstrom trägt nur mit 0,02% dazu bei.

Aus dem Material mit der Permeabilität μ_r im Innern der Spule mit der Erregung NI und der magnetischen Feldstärke $H = \frac{NI}{l}$ schneiden wir nun ein l_l langes Stück aus, fügen also einen l_l langen Luftspalt in den magnetischen Kreis ein (Abb. 305a).

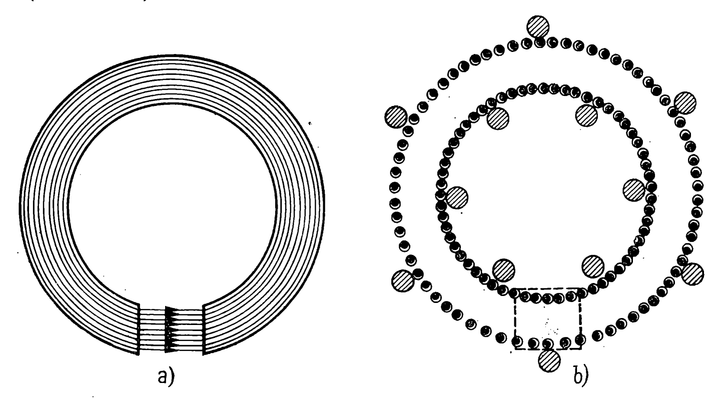


Abb. 305. Luftspalt in einem magnetischen Kreis
a) $\mathfrak{B}$-Linien;
b) die schraffierten Kreise bezeichnen die Wicklungen der äußeren Erregerspulen, die schwarzen Kreise die von den Molekularströmen herrührenden Erregerspulen

Die Erregung NI bleibt dieselbe wie vorher, doch die Induktion vermindert sich. Dies ist verständlich, da wir ein Stück der Länge l_l von den molekularen Kreisströmen entfernt haben. Um die gleiche Induktion wie ohne Luftspalt

wiederherzustellen, müssen wir zu der ohne Luftspalt erforderlichen Erregung

$$(NI)_0 = \frac{lB}{\mu}$$

eine so große äußere Erregung hinzufügen, wie dem Verlust an molekularer Erregung im Luftspalt entspricht (Abb. 305b). Am Entstehen der Induktion B sind im geschlossenen Magnetkreis die molekularen Kreisströme mit der Erregung $(\mu_r - 1)(NI)_0$ beteiligt. Beim Ausschneiden des Luftspaltes wird diese um das l_l/l-fache vermindert. Wir müssen daher die Erregung

$$\frac{l_l}{l}(\mu_r - 1)(NI)_0 = \frac{l_l}{l}(\mu_r - 1)\frac{lB}{\mu} \tag{5.18.5}$$

der äußeren Erregung wieder hinzufügen.

Somit ist für eine bestimmte Induktion B in einem durch einen Luftspalt der Länge l_l geschlossenen magnetischen Kreis die Erregung

$$NI = (NI)_0 + \frac{l_l}{l}(\mu_r - 1)(NI)_0 = l\frac{B}{\mu} + l_l\frac{\mu_r B}{\mu} - l_l\frac{B}{\mu}$$

$$= (l - l_l)\frac{B}{\mu} + l_l\frac{B}{\mu_0} \tag{5.18.6}$$

erforderlich. Da $l - l_l = l_e$ die Länge der Induktionslinien im Eisen ist, können wir auch schreiben

$$NI = l_e\frac{B}{\mu} + l_l\frac{B}{\mu_0}.$$

Wenn wir mit

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{B}}{\mu}$$

die magnetische Feldstärke einführen, erhalten wir

$$NI = l_e H_e + l_l H_l. \tag{5.18.7}$$

Auf der rechten Seite erkennen wir das Linienintegral des magnetischen Feldes, die linke Seite ergibt den von dieser Linie umschlossenen Gesamtstrom. Somit ist die Gleichung (5.18.7) ein Spezialfall des Erregungsgesetzes

$$\oint_L \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A}$$

bzw.

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G}.$$

Selbst in diesem nur geringfügig verallgemeinerten Fall kann $\mathfrak{H}$ nicht allein aus den äußeren Strömen bestimmt werden.

Der Vektor der Induktion $\mathfrak{B}$ repräsentiert seiner Natur nach ein von Strömen (gleichgültig, ob von makroskopischen oder mikroskopischen Strömen) gebildetes Feld, ist also quellenfrei, und die Induktionslinien sind immer geschlossen, d. h.

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0.$$

Hieraus und aus der Definitionsgleichung $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}/\mu$ folgt, daß die Divergenz von $\mathfrak{H}$ von Null verschieden sein muß. Tatsächlich gelangen zur Grenzfläche des Luftspaltes B/μ magnetische Feldstärkelinien, und es verlassen diese Fläche B/μ_0 Linien, so daß dort auf der Flächeneinheit

$$\frac{B}{\mu_0} - \frac{B}{\mu}$$

neue $\mathfrak{H}$-Linien entstehen und scheinbar eine magnetische Flächenladungsdichte auftritt, von welcher die $\mathfrak{H}$-Linien ausgehen.

Die gleichen Erwägungen gelten unverändert, wenn wir, statt einen Luftspalt auszuschneiden, in einem Teil des Ringes den ursprünglichen Stoff von der Permeabilität μ_1 durch einen anderen Stoff von der Permeabilität μ_2 ersetzen. Es gilt dann

$$NI = l_1 \frac{B}{\mu_1} + l_2 \frac{B}{\mu_2} = l_1 H_1 + l_2 H_2.$$

An der Grenzfläche entsteht ein Sprung der Feldstärke H vom Wert

$$\sigma_l = \frac{B}{\mu_2} - \frac{B}{\mu_1},$$

den man dort entstehenden scheinbaren magnetischen Ladungen zuschreibt.

Wenn sich an beiden Seiten der Grenzfläche die Permeabilität nur wenig unterscheidet und man sie sich entlang der Strecke dl als kontinuierlich veränderlich vorstellt, dann ist die Differenz der $\mathfrak{H}$-Linien, die in ein Prisma von der Grundfläche 1 und der Höhe dl eintreten,

$$\frac{B}{\mu + d\mu} - \frac{B}{\mu} = B\left(\frac{1}{\mu + d\mu} - \frac{1}{\mu}\right) \approx -B\frac{d\mu}{\mu^2}.$$

Daraus ergibt sich die Differenz der $\mathfrak{H}$-Linien, welche in oder aus dem Einheitsvolumen ein- bzw. austreten, durch Division durch das Volumen $dl \cdot 1$. Dies ist

definitionsgemäß die Divergenz des Vektors $\mathfrak{H}$:

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = -\frac{B\,d\mu}{\mu^2} \cdot \frac{1}{dl} = -\frac{B}{\mu} \cdot \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dl} = -\frac{\mathfrak{H}}{\mu} \operatorname{grad} \mu .$$

Dieser Zusammenhang ergibt sich auch aus der Gleichung

$$\operatorname{div} \mu\, \mathfrak{H} = \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

zu

$$\mu \operatorname{div} \mathfrak{H} + \mathfrak{H} \operatorname{grad} \mu = 0 .$$

Dies beweist wiederum, daß $\mathfrak{B}$ überall quellenfrei ist.

Aus den bisherigen Ausführungen folgt, daß durch eine auf $\mathfrak{B}$ senkrecht stehende Trennfläche zwischen Medien verschiedener Permeabilität $\mathfrak{B}$ kontinuierlich hindurchtritt, da es quellenfrei ist, $\mathfrak{H}$ sich dagegen sprunghaft gemäß dem Verhältnis

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

ändert, da

$$B = \mu_1 H_1 = \mu_2 H_2$$

ist.

Das Innere eines Solenoids werde nun wie in Abb. 306 zur Hälfte mit einem Stoff ausgefüllt. Diese Anordnung kann durch eine Spule nach Abb. 307

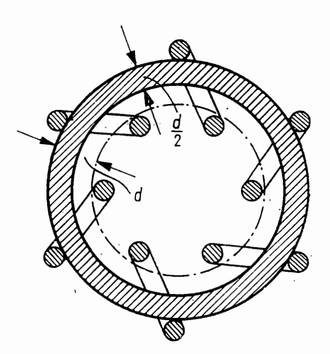


Abb. 306. Zur Hälfte mit einem Stoff ausgefülltes Solenoid

ersetzt werden. Die Induktion B wächst im Innern des Stoffes selbstverständlich auf das μ_r-fache, geradeso, als ob der ganze Querschnitt mit Material ausgefüllt wäre. Für das resultierende Feld ist es nämlich gleichgültig, wie groß der Querschnitt des Feldes ist. B ist natürlich innerhalb und außerhalb des Stoffes

nicht gleichgroß, sondern ändert sich gemäß dem Verhältnis

$$B_1 : B_2 = \mu : \mu_0 = \mu_r.$$

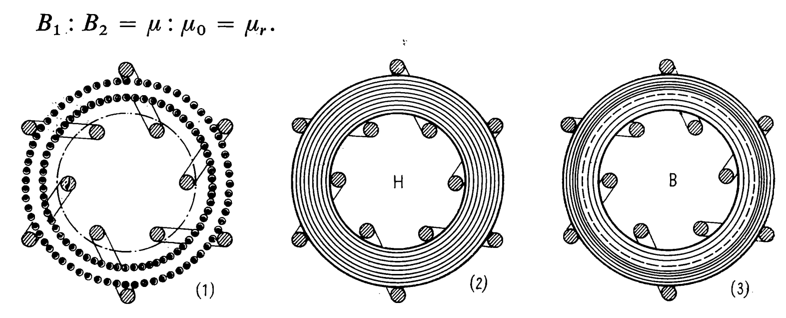


Abb. 307. Ersatzanordnung der Abb. 306

Gleichzeitig ist H innerhalb und außerhalb des Stoffes gleich groß:

$$H = \frac{NI}{l},$$

und es gilt das Erregungsgesetz

$$\oint_L \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A}.$$

5.19. Die Brechungsgesetze der magnetischen Feldgrößen an Trennflächen

Im vorangehenden Abschnitt wurde gezeigt, daß der Vektor der Induktion $\mathfrak{B}$, der durch das gemeinsame Feld der makroskopischen und molekularen Ströme entsteht, durch die auf $\mathfrak{B}$ senkrecht stehenden Trennflächen kontinuierlich, durch zu $\mathfrak{B}$ parallele Flächen jedoch sprunghaft gemäß dem Verhältnis

$$B_1 : B_2 = \mu_1 : \mu_2$$

hindurchgeht.

Wenn die Induktion $\mathfrak{B}_1$ einen beliebigen Winkel mit der Normalen der Trennfläche einschließt (Abb. 308), kann das Feld nach Abb. 309 auch in die genannten zwei Spezialfälle aufgeteilt werden. Falls man auf beide Fälle die bereits bekannten Gesetze anwendet, findet man, daß die Normalkomponente von $\mathfrak{B}$ unverändert bleibt, die Tangentialkomponente aber ihren Wert im Verhältnis $\mu_2 : \mu_1$ an der Grenzfläche ändert:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}.$$

Daraus kann man nun folgern, daß der Wert der durch die Gleichung $\frac{\mathfrak{B}}{\mu} = \mathfrak{H}$ definierten Feldstärke auf beiden Seiten der Trennfläche folgenden Zusammenhang zeigt (Abb. 310):

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}; \quad H_{1t} = H_{2t}.$$

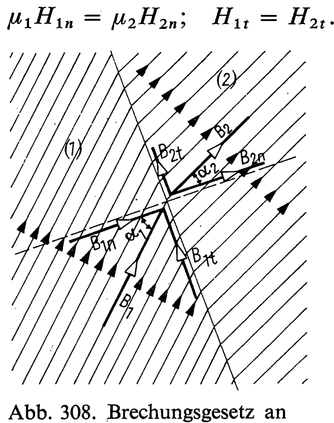



Abb. 308. Brechungsgesetz an Trennflächen

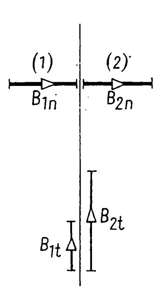


Abb. 309. Komponenten des Induktionsvektors

Dies bedeutet, daß die Tangentialkomponente kontinuierlich durch die Fläche hindurchgeht, also die Rotation von $\mathfrak{H}$ im Innern der Materie, wo keine wirklichen Ströme fließen, gleich Null ist, dagegen $\mathfrak{H}$ auf der Trennfläche Quellen hat und die Normalkomponente von $\mathfrak{H}$ sich eben darum sprunghaft ändert.

Das Brechungsgesetz kann nun unmittelbar der Abb. 308 entnommen werden. Im Sinne des Zusammenhanges $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ liegen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ parallel. Demnach sind die Brechungsgesetze für beide Vektoren gleich, und es gilt

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\dfrac{B_{1t}}{B_{1n}}}{\dfrac{B_{2t}}{B_{2n}}} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Gemäß Abb. 310 gilt für die beiden Teile des Feldes, daß das Linienintegral der Feldstärke $\mathfrak{H}$ nur von den Makroströmen abhängt. Somit ist auch für das resultierende Feld das Erregungsgesetz gültig:

$$\oint_L \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A},$$

wobei die Feldstärke $\mathfrak{H}$ durch $\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{B}}{\mu}$ definiert ist.

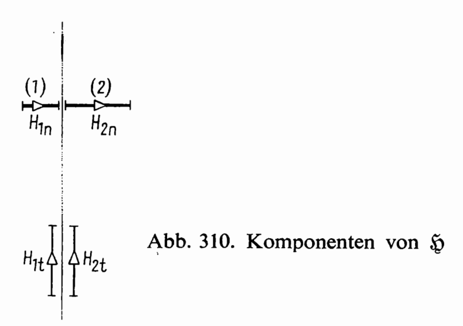


Abb. 310. Komponenten von $\mathfrak{H}$

Beispiele und Ergänzungen

1. An der Grenzfläche zwischen Eisen und Luft werden die Feldlinien sehr stark gebrochen (Abb. 311). Die relative Permeabilität des Eisens sei μ_r.

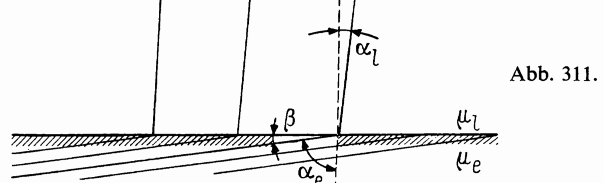


Abb. 311. Induktionslinien an der Grenzfläche von Luft und Eisen

Dann ist

$$\tan \alpha_e = \frac{\mu_e}{\mu_l} \tan \alpha_l = \mu_r \tan \alpha_l .$$

Mit

$$\tan \alpha_e = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{\tan \beta} \approx \frac{1}{\beta}$$

und

$$\tan \alpha_l \approx \alpha_l$$

folgt

$$\frac{1}{\beta} = \mu_r \alpha_l ,$$

$$\beta = \frac{1}{\mu_r \alpha_l}.$$

Bei $\mu_r = 1000$ ist mit $\alpha_l = 0{,}0174 \approx 1°$

$$\beta = \frac{1}{10^3 \cdot 1{,}74 \cdot 10^{-2}} = 5{,}74 \cdot 10^{-2} \approx 3{,}3°.$$

Somit verlaufen die Induktionslinien im Eisen sogar bei fast senkrechtem Eintritt nahezu parallel zur Oberfläche. Deshalb kann schon eine verhältnismäßig dünne geschlossene Eisenfläche das magnetische Feld weitgehend abschirmen (Abb. 312). Die magnetische Abschirmung erreicht jedoch nicht die

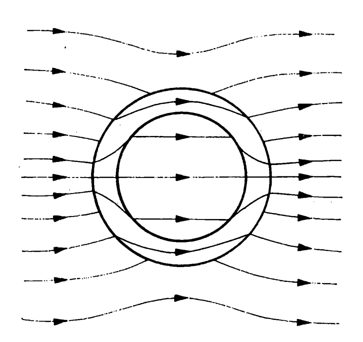


Abb. 312. Magnetische Abschirmung

Vollkommenheit der elektrischen Abschirmung, da zwischen der Permeabilität von Eisen und Luft nur ein Unterschied von 3 bis 4 Größenordnungen besteht, das Verhältnis zwischen der Leitfähigkeit der Luft und der Metalle dagegen praktisch unendlich ist. Die genaue Berechnung des homogenen Feldes im Innern einer in ein äußeres homogenes Feld H_0 gebrachten Kugelschale mit den Durchmessern R_i und R_a und einer Permeabilität μ ergibt

$$H_i = H_0 \frac{1}{1 + \frac{2}{9}\left[1 - \left(\frac{R_i}{R_a}\right)^3\right]\left(\frac{\mu_0}{\mu} + \frac{\mu}{\mu_0} - 2\right)}.$$

Wenn z. B. $R_i = 50$ cm, $R_a = 51$ cm, $\mu_r = 1500$ sind, wird

$$\frac{H_i}{H_0} = 0{,}052.$$

Die innere Feldstärke beträgt also 5% der äußeren.

5.20. Der Vektor der Magnetisierung. Allgemeine Fassung des Erregungsgesetzes

Wir hatten den Magnetisierungsvektor $\mathfrak{M}$ bereits für das im Innern eines homogenen magnetischen Stoffes auftretende homogene Magnetfeld definiert. Er war derjenige Teil der im Innern des Stoffes meßbaren Induktion, der durch die elementaren Kreisströme neben der Komponente $\mu_0\mathfrak{H}$ entstand, die ausschließlich vom äußeren Strom abhängt.

Es soll nun der Gleichung

$$\mathfrak{B} = \mu_0\mathfrak{H} + \mathfrak{M}$$

eine etwas allgemeinere Formulierung gegeben werden.

Ein Teil des Innern einer Spule sei mit einem ferromagnetischen Stoff ausgefüllt (Abb. 313). Es soll hierbei nicht vorausgesetzt sein, daß sich die elementaren Kreisströme nach der resultierenden Induktion $\mathfrak{B}$ eingestellt haben, denn es kann Fälle geben – z. B. bei einem sehr starken Permanentmagneten –, wo diese so stark ausgerichtet sind, daß sie selbst von einem sehr starken äußeren

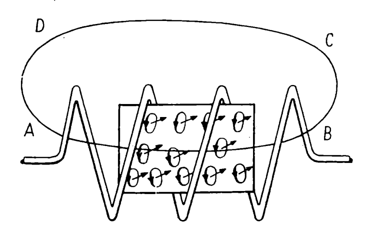


Abb. 313. Allgemeines Erregungsgesetz (nach KALANTAROW nnd NEIMAN)

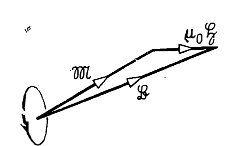


Abb. 314. Resultierende aus Magnetisierungsvektor und Induktionsvektor

Feld kaum beeinflußt werden. Dann liegt die Resultierende aus dem Feld der äußeren Spule und den Mikrofeldern der elementaren Kreisströme beliebig zu den Richtungen der Spulenachse und der Achse der Kreisströme (Abb. 314).

Nach dem Erregungsgesetz erhält man das Linienintegral des Vektors $\mathfrak{B}$ entlang einer beliebigen Linie $ABCD$ (Abb. 313), indem man untersucht, welche Ströme durch eine über diese Linie gespannte Fläche hindurchtreten, die molekularen Ströme mit eingerechnet:

$$\oint_{ABCD} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{l} = \mu_0 \int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A} + \mu_0 \int_A \mathfrak{G}^*\, d\mathfrak{A}, \qquad (5.20.1)$$

wobei $\mathfrak{G}$ die Stromdichte im makroskopischen Leiter und $\mathfrak{G}^*$ die sich aus den mikroskopischen Stromkreisen ergebende Stromdichte bedeuten. $\mathfrak{G}^*$ kann man

einfacher bestimmen, indem man feststellt, wieviel Strom den Leiter insgesamt umwindet. Bezeichnen $\mathfrak{n}$ die Richtung der Achse der kleinen Stromkreise in einem gegebenen Punkt und dI^*/dn den Strom, der je Längeneinheit die in

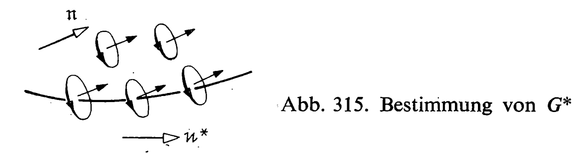


Abb. 315. Bestimmung von G^*

Richtung $\mathfrak{n}$ weisende Linie umwindet, dann wird in einer beliebigen Richtung $\mathfrak{n}^*$ gemäß Abb. 315 die Stromstärke

$$\left(\frac{dI^*}{dn}\right)\mathfrak{n}\mathfrak{n}^*$$

die Linie pro Längeneinheit umwinden. In Richtung $d\mathfrak{l}$ auf einer Strecke $d\mathfrak{l}$ umwindet die Stromstärke

$$\left(\frac{dI^*}{dn}\right)\mathfrak{n}\, d\mathfrak{l}$$

die Leitung. Magnetisierungsvektor des Stoffes oder Magnetisierung in einem beliebigen Punkt im Innern des Stoffes nennt man den Vektor

$$\mathfrak{M} = \mu_0\left(\frac{dI^*}{dn}\right)\mathfrak{n}.$$

Die Gleichung (5.20.1) lautet dann

$$\oint_L \mathfrak{B}\, d\mathfrak{l} = \mu_0 \int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A} + \mu_0 \oint_L \left(\frac{dI^*}{dn}\right)\mathfrak{n}\, d\mathfrak{l} = \mu_0 \int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A} + \oint_L \mathfrak{M}\, d\mathfrak{l}$$

oder

$$\oint_L \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{M}}{\mu_0}\, d\mathfrak{l} = \int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A}.$$

Definiert man jetzt die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ durch die Gleichung

$$\frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{M}}{\mu_0} = \mathfrak{H}, \tag{5.20.2}$$

so gilt das Erregungsgesetz

$$\oint_L \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \int_A \mathfrak{G}\, d\mathfrak{A} \tag{5.20.3}$$

in seiner alten Form. Der so definierte Vektor $\mathfrak{H}$ ist mit dem bereits bekannten identisch, und, darauf soll wiederum hingewiesen werden, er ist durch die äußeren Ströme im allgemeinen nicht gänzlich bestimmt, denn aus dem Erregungsgesetz folgt nur die Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G};$$

man weiß aber, daß ein Vektorfeld nur durch die gemeinsame Angabe von Rotation und Divergenz bestimmt werden kann.

Als Grundgesetze akzeptieren wir demnach die Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

und

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{M}}{\mu_0}\right) = \mathfrak{G}. \tag{5.20.4}$$

Diese Gleichungen pflegt man auch in der Form

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \tag{5.20.5}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G}, \tag{5.20.6}$$

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H} + \mathfrak{M} \tag{5.20.7}$$

zu schreiben. Die dritte Gleichung erklärt, durch welche Beziehung der Vektor $\mathfrak{H}$ eingeführt wurde.

Aus (5.20.5) folgt, daß das Induktionsfeld des Vektors $\mathfrak{B}$ unter allen Umständen ein quellenfreies Feld ist. Es besitzt aber Wirbel, teils wegen der Stromdichte, teils durch die Wirbel von $\mathfrak{M}$ gemäß (5.20.4):

$$\operatorname{rot} \mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{G} + \operatorname{rot} \mathfrak{M}.$$

Auch das magnetische Feld des Vektors $\mathfrak{H}$ ist ein Wirbelfeld. Seine Wirbel sind aber nur die makroskopischen Stromdichten. In dieser Hinsicht ist dieses Feld einfacher als das Feld von $\mathfrak{B}$. Andererseits besteht aber der Zusammenhang

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = \mu_0 \operatorname{div} \mathfrak{H} + \operatorname{div} \mathfrak{M} = 0,$$

woraus sich

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = -\frac{\operatorname{div} \mathfrak{M}}{\mu_0}$$

ergibt. Damit besitzt $\mathfrak{H}$ auch Quellen, und zwar überall dort, wo $\mathfrak{M}$ Quellen besitzt.

$\mathfrak{B}$ ist überall quellenfrei, $\mathfrak{H}$ dagegen nur da wirbelfrei, wo keine makroskopischen Stromdichten vorhanden sind, z. B. im Innern eines Stoffes oder an den Grenzflächen zweier verschiedener Stoffe. Hieraus folgt sofort, daß die Normalkomponente von $\mathfrak{B}$ kontinuierlich die Trennfläche überschreiten muß, wogegen der durch (5.20.2) definierte Vektor $\mathfrak{H}$ zu beiden Seiten der Fläche gleichgroße Tangentialkomponenten besitzt:

$$B_{1n} = B_{2n},$$

$$(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{M}_1)_t = (\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{M}_2)_t.$$

Damit lautet das allgemeine Brechungsgesetz

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_0 H_{1t} + M_{1t}}{\mu_0 H_{2t} + M_{2t}}.$$

5.21. Berechnung magnetischer Kreise

In der Elektrotechnik verwendet man das Erregungsgesetz zur Berechnung von magnetischen Kreisen. Darunter versteht man im allgemeinen, daß man die zur Erreichung eines gegebenen magnetischen Flusses notwendige Erregungsspule berechnen muß, wenn die geometrischen Maße des magnetischen Kreises und dessen Permeabilität gegeben sind. Für die Berechnungen ist es notwendig, den qualitativen Verlauf des Feldlinienbildes zu kennen. So setzt man im Falle des Kreises nach Abb. 316 voraus, daß die Dichte der Induktionslinien innerhalb aller Abschnitte mit konstantem Querschnitt konstant ist.

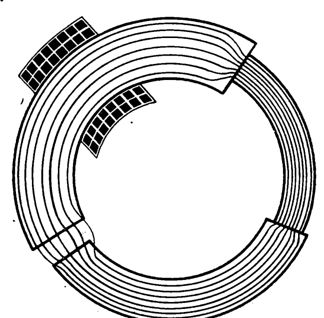


Abb. 316. Magnetischer Kreis

Wenn man das Erregungsgesetz auf den geschlossenen Kreis anwendet, erhält man

$$\oint_L \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \cdots + H_n l_n = NI.$$

Setzt man hierin

$$H_i = \frac{B_i}{\mu_i} = \frac{\Phi}{A_i}\frac{1}{\mu_i}$$

ein, so erhält man für die Gesamterregung

$$NI = \frac{\Phi l_1}{A_1\mu_1} + \frac{\Phi l_2}{A_2\mu_2} + \cdots = \Phi \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{A_i\mu_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Phi}{A_i\mu_i}\right) l_i . \qquad (5.21.1)$$

Diese Gleichung wird oft das OHMsche Gesetz des magnetischen Kreises genannt. Tatsächlich ist diese formale Analogie nützlich. $\frac{l}{A\mu}$ nennt man den magnetischen Widerstand. μ spielt dabei die Rolle der Leitfähigkeit. Man kann dann sagen, daß zur Aufrechterhaltung eines magnetischen Kraftflusses Φ an einem magnetischen Widerstand $\frac{l_i}{A_i\mu_i}$ eine magnetische Spannung $(NI)_i = \frac{l_i}{A_i\mu_i}\Phi$ erforderlich ist. Ein Kraftfluß Φ erzeugt also an einem magnetischen Widerstand $\frac{l_i}{A_i\mu_i}$ eine magnetische Spannung $\left(\frac{l_i}{A_i\mu_i}\right)\Phi$. Auf diese Weise kann man formal die zur Erregung der einzelnen Teile des magnetischen Kreises benötigte Amperewindungszahl getrennt bestimmen. Genauso wie man bei Leitern die Resultierende der parallel und in Reihe geschalteten Widerstände berechnet, kann auch die Resultierende des magnetischen Kreises berechnet werden. Dabei muß man aber beachten, daß die spezifische Leitfähigkeit, d. h. die magnetische Permeabilität, nicht konstant, sondern eine Funktion der Induktion ist. So hängt z. B. das Verhältnis des Induktionsflusses im oberen

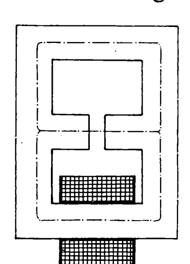


Abb. 317. Magnetischer Kreis mit Überbrückung und Luftspalt

zu dem im unteren Abschnitt des magnetischen Kreises in der Abb. 317 von der Stärke der Induktion ab. Bei einer kleinen Induktion schließen sich fast alle Induktionslinien in der oberen Überbrückung. Bei sehr großer Induktion wird die obere Überbrückung gesättigt, wodurch sich die Permeabilität verringert und ein immer größerer Anteil der Induktionslinien durch den Luftspalt verläuft.

Durch ähnliche Überlegungen kann man den Verlauf des magnetischen Feldes im Spalt einer elektrischen Maschine feststellen (Abb. 318). Man muß auch hier berücksichtigen, daß bei Sättigung in den Zahnfüßen ein größerer Bruchteil der Induktionslinien durch die Zwischenräume geht.

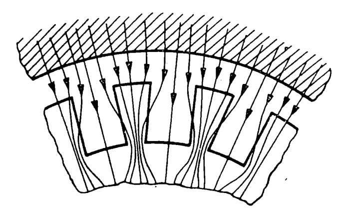
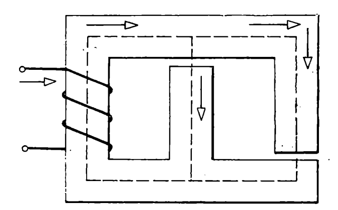


Abb. 318. Magnetisches Feld im Luftspalt einer elektrischen Maschine

Das Eisen leitet also den Kraftfluß, solange es nicht gesättigt ist, geradeso, wie ein guter Leiter in einem nicht vollkommenen Isolator den elektrischen Strom leitet. Man kann demnach die verschiedenen Formen der magnetischen Kreise durch analoge Modelle ohmscher Stromkreise ersetzen (Abb. 319).



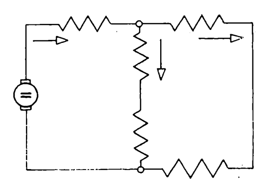


Abb. 319. Magnetischer Kreis und Ersatzmodell

In der Praxis ist die Anwendung der Gleichung (5.21.1) sehr einfach. Man kann bei gegebenem Kraftfluß und Querschnitt die Induktion mit Hilfe der Gleichung $B = \Phi/A$ bestimmen und dann aus der Magnetisierungskurve sofort die Feldstärke ablesen. Multipliziert man diese Zahl mit der Länge des betreffenden Abschnittes, so erhält man die Amperewindungszahl, welche zur Erregung dieses Abschnittes notwendig ist.

Abb. 320 zeigt den magnetischen Kreis einer Gleichstrommaschine. Es ist leicht zu sehen, daß die größte Erregung auf den sehr kurzen Luftspalt und auf die Zähne entfällt, und zwar auf den Luftspalt deshalb, weil die magnetische Leitfähigkeit der Luft im Verhältnis zur Leitfähigkeit der ferromagnetischen Stoffe sehr klein ist, und auf die Zähne deshalb, weil im sehr verengten Querschnitt der Wert der Induktion stark anwächst und die Permeabilität sich in der Nähe der Sättigung sehr verringert.

Die Aufgabe lautete bisher, zum gegebenen magnetischen Kraftfluß die zur Erregung nötige Amperewindungszahl zu finden. Den Kraftfluß selbst bestimmen andere Voraussetzungen, z. B. bei Generatoren die Spannung, bei Hubmagneten die zu hebende Last, bei Transformatoren die Spannung je Windung.

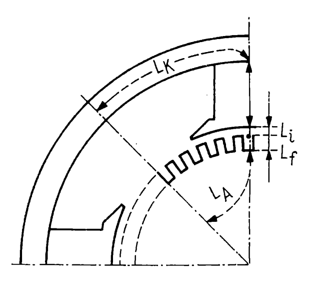


Abb. 320. Magnetischer Kreis einer Gleichstrommaschine

Versucht man umgekehrt, den Kraftfluß zu bestimmen, der durch eine gegebene Erregung entsteht, so benötigt man zur Bestimmung des Kraftflusses den Wert der Induktion, zur Bestimmung der Induktion die Größe der magnetischen Permeabilität. Man weiß aber, daß die magnetische Permeabilität nur dann angegeben werden kann, wenn die Induktion bekannt ist. Deshalb kann man aus der Umstellung der Gleichung (5.21.1) in die Form

$$\Phi = \frac{NI}{\sum \frac{l_i}{A_i \mu_i}}$$

nicht viel Nutzen ziehen, denn auf der rechten Seite der Gleichung hängt der Wert der Permeabilität von jener Größe B ab, die durch den Kraftfluß erst bestimmt werden soll.

Diese Aufgabe kann man nur graphisch oder numerisch lösen, indem man z. B. nach der früher genannten Methode zum Wert eines angenommenen Kraftflusses (den man möglichst genau schätzt) die notwendige Windungszahl bestimmt. Die so resultierende Erregung stimmt im allgemeinen mit der

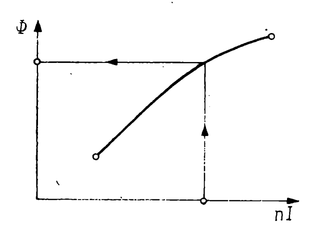


Abb. 321. Kraftfluß einer gegebenen Erregung

gegebenen Erregung noch nicht überein. Aus dem Resultat ersieht man aber, in welcher Richtung die ursprüngliche Annahme abzuändern ist, um besser übereinstimmende Werte zu erhalten.

Wenn man auf diese Weise zu mehreren Induktionsflüssen die Erregung bestimmt hat, kann man eine Kurve der Amperewindungszahlen als Funktion des Induktionsflusses zeichnen. Aus dieser Kurve kann dann der Kraftfluß abgelesen werden, der zur gegebenen Erregung gehört (Abb. 321).

Beispiele und Ergänzungen

1. Man stelle aus Transformatorenblech den in der Abb. 322 gezeichneten Eisenkern her. Die Zahlenwerte sind

$A_1 = 6\ \text{cm}^2$, $A_2 = 2\ \text{cm}^2$, $l_1 = 5\ \text{cm}$, $l_2 = 15\ \text{cm}$, $l_3 = 10\ \text{cm}$, $l_4 = 0{,}5\ \text{cm}$.

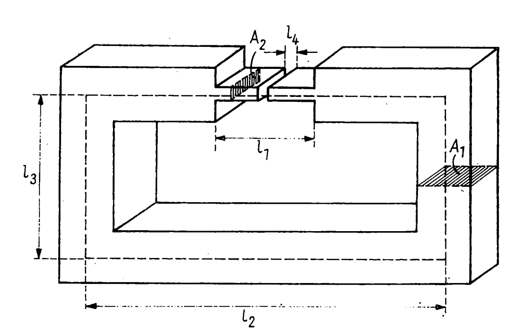


Abb. 322. Eisenkern zu Beispiel 1

Es soll im Luftspalt die Induktion $B_0 = 1{,}5\ \text{Vs/m}^2 = 15000\ \text{G}$ erzeugt werden. Wie groß ist die hierzu notwendige Erregung? Es ist zweckmäßig, die Rechnungen in einer Tabelle zusammenzufassen.

Abschnitt	Querschnitt	$B = B_0 \frac{A_2}{A}$	H	l	Hl
1	A_2	1,5	5000	$4{,}5 \cdot 10^{-2}$	225
2	$A_1 = 3A_2$	0,5	130	0,25	32,5
3	A_1	0,5	130	0,2	26
4	A_2	1,5	$1{,}195 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^{-3}$	5960

Die notwendige Erregung ist

$$NI = \oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \sum Hl = 6243{,}5\ \text{A}.$$

Wenn ein Strom $I = 60$ A zur Verfügung steht, so ist die nötige Windungszahl

$$N = \frac{6230}{60} = 104.$$

Bei der Rechnung wurde im Abschnitt 1—3 der Wert H aus B mit Hilfe der Magnetisierungskurve bestimmt, im Luftspalt dagegen aus der Beziehung $H = \dfrac{B}{\mu_0}$ berechnet.

2. Die Analogie zwischen ohmschen und magnetischen Kreisen kann auch auf die Felder selbst ausgedehnt werden. Die Grundgleichungen des magnetischen Feldes sind im strom- und materiefreien Raum

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0.$$

Diese Gleichungen sind ähnlich gebaut wie die des statischen elektrischen Feldes und des Strömungsfeldes im homogenen Raum:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{G} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{G} = 0.$$

Auch die Grenzbedingungen sind dieselben. Nach dem Brechungsgesetz stehen nämlich auch die $\mathfrak{H}$-Linien senkrecht, wenn die Permeabilität der als Elektroden dienenden Polschuhe als unendlich groß angenommen werden kann (Abb. 323).

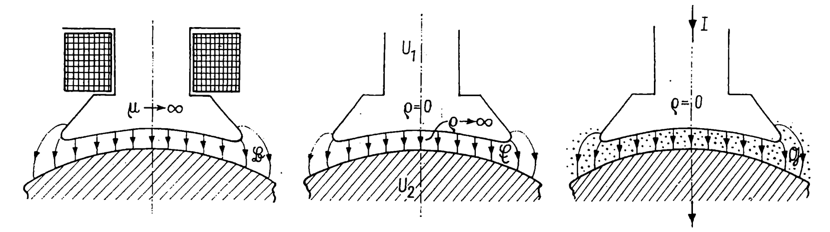


Abb. 323. Analogie zwischen $\mathfrak{B}$-, $\mathfrak{E}$- und $\mathfrak{G}$-Feld

5.22. Dauermagnete

Das Erregungsgesetz hat sich, wie wir sehen, als allgemeingültig erwiesen. Wir wenden dieses Gesetz nun speziell auf das magnetische Feld eines Dauermagneten an (Abb. 324). Der Dauermagnet wurde hergestellt, indem ein geschlossener ringförmiger Eisenkörper mit Hilfe des Stromes durch eine auf

ihn gewickelte Erregerspule bis zur Sättigung magnetisiert wurde und dann die Erregung wieder bis auf Null zurückgenommen wurde. Durch die Parallelstellung der molekularen Kreisströme verbleibt dann eine Induktion B_r im

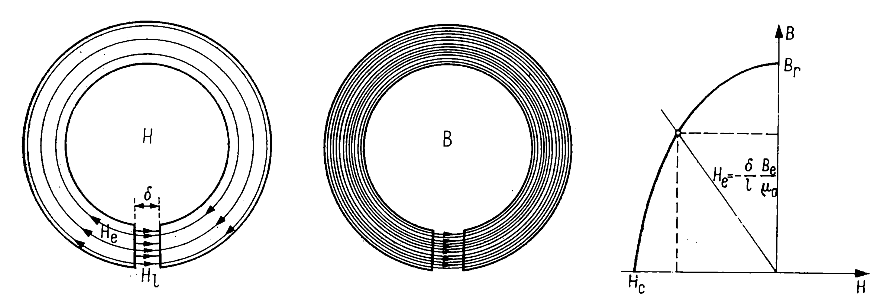


Abb. 324. Permanentmagnet mit Luftspalt

Innern des Eisenkörpers. Gleichzeitig ist H sowohl im Innern als auch außerhalb Null. Schneidet man nun einen Spalt der Dicke δ aus dem Ring aus, so vermindert sich selbstverständlich die Induktion im Innern. Sie vermindert sich einerseits, weil man den δ/l-ten Teil der molekularen Kreisströme, welche die Induktion erzeugten, entfernt hat, andererseits auch deshalb, weil die verminderte Induktion die elementaren Kreisströme nicht mehr in so ausgeprägter Ordnung halten kann.

Die Entfernung der molekularen Kreisströme im Abschnitt δ entspricht der Wirkung einer negativen Erregung. Die zu den negativen Erregungswerten gehörenden $\mathfrak{B}$-Werte liegen auf der Magnetisierungskurve im Abschnitt B_r bis H_c.

In erster Näherung kann die Induktion überall als homogen betrachtet werden. Das Erregungsgesetz lautet, da jede äußere Erregung fehlt,

$$l_e H_e + \delta H_l = 0, \tag{5.22.1}$$

$$H_e = -\frac{\delta}{l} H_l.$$

Da jedoch

$$H_l = \frac{B_l}{\mu_0}$$

und die Induktionen im Eisen und in der Luft gleich groß sind, wird

$$H_e = -\frac{\delta}{l}\frac{B_e}{\mu_0}. \tag{5.22.2}$$

Diese Gleichung verknüpft die im Eisen meßbare Induktion mit der im Eisen meßbaren Feldstärke. Denselben Zusammenhang zwischen diesen Größen zeigt auch der entsprechende Teil der Magnetisierungskurve. Beide Zusammenhänge können gleichzeitig nur bei einem bestimmten Wertepaar H_e, B_e befriedigt werden, und zwar dort, wo die Gerade nach Gleichung (5.22.2) die Magnetisierungskurve schneidet. Für eine bestimmte Eisensorte wird so die Stärke der Induktion im Eisen und gleichzeitig deren Stärke im Luftspalt bestimmt, womit auch der Kraftfluß des Permanentmagneten definiert ist. Umgekehrt können, wenn der Kraftfluß und die Breite des Luftspaltes gegeben sind, Länge und Querschnitt des Permanentmagneten bestimmt werden.

Den tatsächlichen Verlauf des Induktionsfeldes eines ringförmigen Permanentmagneten zeigt die Abb. 325.

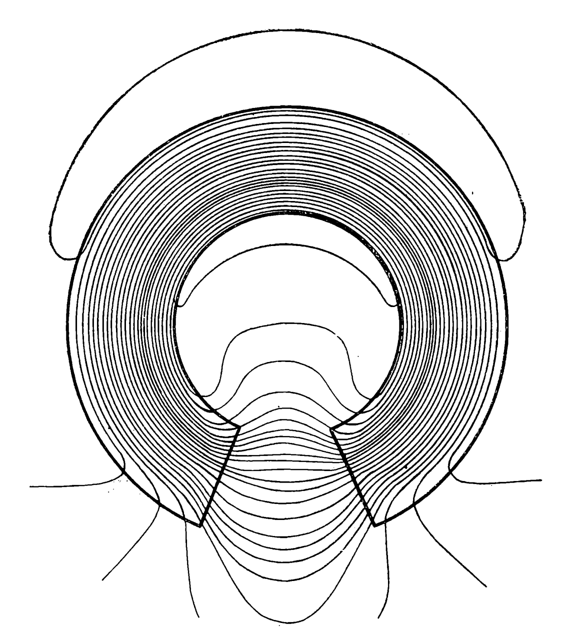


Abb. 325. Induktionsfeld eines Dauermagneten mit Luftspalt (nach ATTWOOD)

5.23. Magnetostatik

Das statische magnetische Feld ruhender magnetischer Ladungen spielte früher eine große Rolle. Zur Formulierung von Grundbegriffen wird es auch heute in physikalischen Lehrbüchern oft vor den elektrischen Erscheinungen behandelt. Die magnetische Feldstärke wird dann mit Hilfe des COULOMB-

schen Gesetzes definiert, das die Kraftwirkung zwischen den magnetischen Ladungen bestimmt. Mit dieser Definition ist die Messung der magnetischen Feldstärke auf eine prinzipiell verfehlte Annahme gegründet, nämlich auf die der Existenz wirklicher magnetischer Ladungen. Praktisch können solche Feldstärkemessungen keineswegs mit der entsprechenden Genauigkeit durchgeführt werden und sind auch nicht üblich. Der Aushilfscharakter der magnetischen Ladung ist auch daraus ersichtlich, daß dieser zum Ausgangspunkt gewählte Begriff außerhalb der *Magnetostatik* nirgends mehr verwendet wird.

Die Erscheinungen der Magnetostatik sollen im folgenden mit Hilfe der Felder $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ erklärt und die heute nur eine untergeordnete, in der Geschichte der Physik jedoch eine große Rolle spielende magnetische Ladung definiert werden.

Wir wissen bereits, daß ein prismatischer, homogen magnetisierter Permanentmagnet durch eine Spule ersetzt werden kann, welche die gleiche Länge und denselben Querschnitt besitzt. Die Erregung pro Längeneinheit ist

$$\frac{NI}{l} = \frac{M}{\mu_0}.$$

Das μ_0-fache dieser Erregung ergibt annähernd die Induktion im Innern der Spule (sie würde den genauen Wert ergeben, wenn die Spule unendlich lang wäre). Mit derselben Näherung erhält man auch die Induktion im Innern eines magnetischen Stabes:

$$\mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{H} + \mathfrak{M}, \tag{5.23.1}$$

wobei $\mathfrak{H}$ nur an der Stirnfläche Quellen besitzt. Wenn der Stab also genügend lang ist, kann deren Wirkung vernachlässigt werden, und es gilt $\mathfrak{B} \approx \mathfrak{M}$.

Da das Feld einer einzigen Windung nach Abschn. 2.4.3., Beispiel 1, und 3.10.6. in großer Entfernung dem Feld eines magnetischen Dipols mit dem Moment $\mu_0 AI$ äquivalent ist, kann das Moment einer Spule mit N Windungen geschrieben werden

$$\mathfrak{m} = N\mu_0 I\mathfrak{A}. \tag{5.23.2}$$

Man kommt zu demselben Ergebnis, wenn man in Betracht zieht, daß $\mathfrak{M}$ das magnetische Moment der Volumeneinheit ist. Das vollständige magnetische Moment ist dann

$$m = MlA = \mu_0 \frac{NI}{l} lA = N\mu_0 IA.$$

Die Induktion im Feld eines Dipols vom Moment $\mathfrak{m}$ beträgt nach Abschnitt 3.11.6. in einer Entfernung r

$$\mathfrak{B} = -\operatorname{grad} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{r}^0}{r^2} = -\operatorname{grad} \frac{1}{4\pi} \frac{N\mu_0 I \mathfrak{A} \mathfrak{r}^0}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{(\mathfrak{m}\mathfrak{r}^0)\mathfrak{r}^0}{r^3} - \frac{\mathfrak{m}}{r^3} \right]. \tag{5.23.3}$$

Denkt man sich nun das Dipolmoment dadurch entstanden, daß sich an den Enden des Permanentmagneten die magnetischen Ladungen $-Q_m$ und $+Q_m$ befinden, dann ist das Moment

$$lQ_m = N\mu_0 IA, \tag{5.23.4}$$

und für die magnetische Ladung folgt

$$Q_m = \frac{N\mu_0 IA}{l} = \mu_0 HA = BA. \tag{5.23.5}$$

Die magnetische Ladung ist gleich der Anzahl der aus der Spule tretenden Induktionslinien.

Im Fall eines inhomogenen Feldes gilt

$$Q_m = \oint_A \mathfrak{B}\, d\mathfrak{A} \tag{5.23.6}$$

für eine geschlossene Fläche, welche die Ladung umhüllt.

Dieser Gleichung entspricht in der Elektrostatik die Gleichung $Q = \oint \mathfrak{D} d\mathfrak{A}$.

Man weiß, daß das Integral in (5.23.6) immer Null ergibt, was zugleich ein Beweis gegen die Existenz der magnetischen Ladung ist. Wir nehmen aber jetzt an, daß die Induktionslinien ihre Quelle auf der Begrenzungsfläche haben.

Man kann zum Begriff der magnetischen Ladung auch aus der Untersuchung der Kraftwirkung zwischen magnetischen Ladungen kommen. Wir denken uns einen in der einen Richtung unendlich langen, sehr dünnen, homogen magnetisierten Permanentmagneten (Abb. 326a). Sein Feld ist dem des Solenoids äquivalent (Abb. 326b). Die am Ende des Solenoids austretenden Feld-

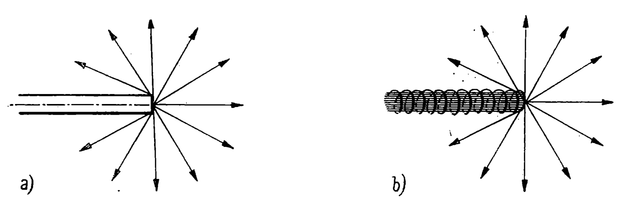


Abb. 326. Dünner, homogen magnetisierter Dauermagnet und Solenoid

linien sind im ganzen Feld wirbelfrei, abgerechnet die schmale Endfläche des Solenoids, und ihre Quelle kann als punktförmig aufgefaßt werden; die Zahl der austretenden Induktionslinien ist

$$Q_{m_1} = \mu_0 H_1 A_1 = \mu_0 A_1 \left(\frac{NI}{l}\right)_1 .$$

Die Induktionslinien verlaufen strahlenförmig, und die Stärke der Induktion ist in einer Entfernung r, vom Ende der Spule bzw. des Permanentmagneten gerechnet,

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} A_1 \left(\frac{NI}{l}\right)_1 \mathfrak{r}^0 = \frac{Q_{m_1}}{4\pi r^2} \mathfrak{r}^0 .$$

In das Feld dieser Spule wird nun eine zweite, gleichfalls einen Dauermagneten repräsentierende Spule gebracht. Das Moment dieses Magneten, auf die Volumeneinheit bezogen, ist

$$\mu_0 \left(\frac{NI}{l}\right)_2 ,$$

seine „magnetische Ladung" dementsprechend

$$Q_{m_2} = \mu_0 \left(\frac{NI}{l}\right)_2 A_2 .$$

Der Abb. 327 ist zu entnehmen, daß auf eine einzelne Wicklung der Spule (2) kein Drehmoment wirkt; aber wegen der Inhomogenität des Feldes wirken axiale Kräfte. Die Kraft, die auf eine einzelne Windung wirkt, ist

$$F_e = 2 \frac{IA_2}{r} B .$$

Die resultierende Kraft beträgt nämlich

$$F_e = 2\pi r_0 IB \sin\alpha ,$$

und da α klein ist, gilt

$$\sin\alpha \approx \frac{r_0}{r} = \tan\alpha ,$$

so daß

$$F_e = 2 \frac{r_0^2 \pi IB}{r} = 2 \frac{IA_2}{r} B$$

wird.

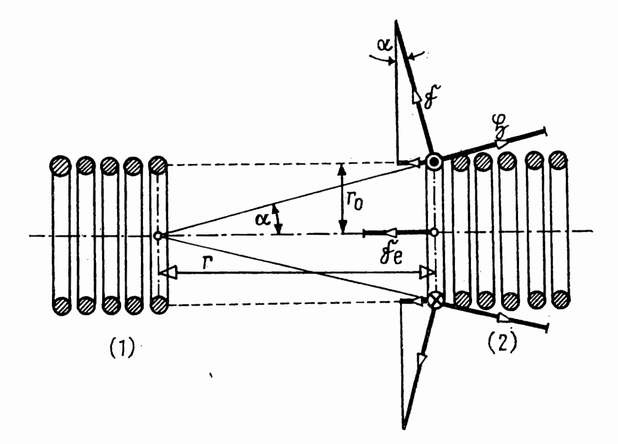


Abb. 327. Zur Ableitung des magnetischen COULOMBschen Gesetzes

Bezeichnet man nun mit dl ein Längenelement der Spule, so wird die Kraft

$$dF = 2A_2 \left(\frac{NI}{l}\right)_2 dl \cdot B \cdot \frac{1}{r}.$$

Die Kraft, die auf die ganze Spule wirkt, ist dann

$$F = \int_R^{R+l} 2A_2 \left(\frac{NI}{l}\right)_2 dr \cdot B \frac{1}{r} = A_2 \left(\frac{NI}{l}\right)_2 \frac{Q_{m_1}}{4\pi} \left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+l)^2}\right].$$

Für $l \to \infty$ gilt

$$\frac{1}{(R+l)^2} \to 0,$$

$$A_2 \left(\frac{NI}{l}\right)_2 = \frac{Q_{m_2}}{\mu_0}$$

und

$$F = \frac{1}{4\pi \mu_0} \frac{Q_{m_1} Q_{m_2}}{R^2}.$$

Diese Gleichung wird *magnetisches* COULOMB*sches Gesetz* genannt. Es sagt aus, daß die Kraft zwischen zwei „punktförmigen magnetischen Ladungen" umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung ist.

5.24. Die homogene Kugel und das homogene Ellipsoid im magnetischen Feld

In ein ursprünglich homogenes magnetisches Feld $\mathfrak{H}_0$ soll eine Kugel aus einem Stoff mit der Permeabilität μ_r gebracht werden. Das äußere Feld magnetisiert die Kugel, und die molekularen Kreisströme wirken bei der Bildung des Feldes mit. Das resultierende Feld $\mathfrak{H}$ muß im Innern der Kugel ein solches magnetisches Moment induzieren, daß die zu diesem Moment gehörende Flächenladungsdichte gerade dieses resultierende Feld erzeugt. Im Innern der homogen magnetisierten Kugel ist das resultierende magnetische Feld gleichfalls homogen: dies kann ähnlich nachgewiesen werden, wie es im Fall der Dielektrika geschehen ist. Darüber hinaus sieht man, daß, wenn der Begriff der magnetischen Ladungen als Hilfsbegriff beibehalten wird, die hier gestellte Aufgabe dem Problem einer sich im homogenen elektrischen Feld befindlichen Kugel und dessen Lösung vollkommen äquivalent ist. Es genügt daher, das Endresultat anzugeben.

Im Innern einer in einem homogenen Feld der Feldstärke $\mathfrak{H}_0$ befindlichen Kugel mit der Permeabilität μ_r tritt eine Magnetisierung

$$\mathfrak{M} = 3\mu_0 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \mathfrak{H}_0$$

auf, die jedoch im ganzen inneren Feld konstant ist. Diese erzeugt im Innern der Kugel eine Feldstärke

$$\mathfrak{H}^* = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \mathfrak{H}_0 = \frac{\mathfrak{M}}{3\mu_0}.$$

Die resultierende Feldstärke ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}^* = \frac{3}{\mu_r + 2} \mathfrak{H}_0$$

und die resultierende Induktion

$$\mathfrak{B} = \frac{3\mu}{\mu_r + 2} \mathfrak{H}_0.$$

Wenn μ_r sehr groß gegen 1 ist, wird

$$\mathfrak{M} \approx 3\mu_0 \mathfrak{H}_0,$$

das resultierende magnetische Feld im Innern der Kugel geht gegen Null, und die resultierende Induktion ist

$$\mathfrak{B} \approx 3\mu_0 \mathfrak{H}_0 = 3\mathfrak{B}_0.$$

Wie man sieht, wird durch das Feld der Dipole, welche durch die Einwirkung des äußeren Feldes entstanden sind, das ursprüngliche Feld geschwächt. Diese Schwächung wird durch den sogenannten Entmagnetisierungsfaktor N gekennzeichnet, indem man für das resultierende Feld schreibt

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - N\frac{\mathfrak{M}}{\mu_0}.$$

Der Entmagnetisierungsfaktor hängt ausschließlich von den geometrischen Verhältnissen ab. Im Falle einer Kugel hat nach der eben erfolgten Ableitung N den Wert $^1/_3$.

Auch das Feld im Innern eines Ellipsoids, das sich in einem homogenen magnetischen Feld befindet, ist homogen.

Der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ kann am genauesten mit Hilfe eines ellipsoidförmigen Probestückes gemessen werden: Im Innern einer Spule mit gegebenen Abmessungen wird eine homogene Feldstärke $\mathfrak{H}_0$ erzeugt, die aus der Stromstärke genau berechnet werden kann.

In dieses Feld bringt man ein Rotationsellipsoid aus dem Stoff, dessen Eigenschaften gemessen werden sollen, so daß die große Achse in Richtung der Kraftlinien liegt. Das Verhältnis der großen zur kleinen Achse sei p.

Es gilt

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - N\frac{\mathfrak{M}}{\mu_0}, \tag{5.24.1}$$

wobei der Entmagnetisierungsfaktor durch

$$N = \frac{1}{p^2 - 1}\left[\frac{p}{\sqrt{p^2 - 1}}\ln\left(p + \sqrt{p^2 - 1}\right) - 1\right]$$

gegeben ist. Des weiteren besteht zwischen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{M}$ der Zusammenhang

$$\mathfrak{B} = \mu_0\mathfrak{H} + \mathfrak{M}. \tag{5.24.2}$$

$\mathfrak{H}_0$ und N können berechnet und $\mathfrak{B}$ kann gemessen werden, und zwar mit Hilfe einer um das Ellipsoid gelegten Spule und eines ballistischen Galvanometers. Wenn der Wert $\mathfrak{H}$ der Gleichung (5.24.1) in die Gleichung (5.24.2) eingesetzt wird, erhält man für die Magnetisierung

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{B} - \mu_0\mathfrak{H}_0}{1 - N},$$

mit deren Kenntnis dann auch zusammengehörende Werte $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ bestimmt werden können (Abb. 328).

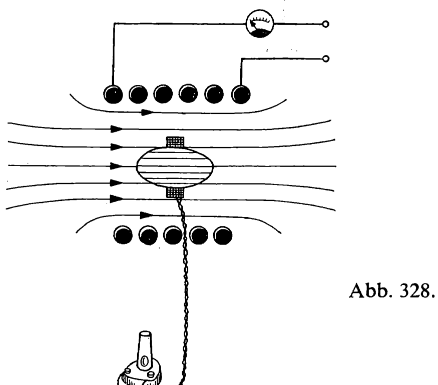


Abb. 328. Bestimmung der Magnetisierung

Beispiele und Ergänzungen

1. Im Innern einer Eisenkugel mit großer Permeabilität war

$$\mathfrak{M} \approx 3\mu_0\mathfrak{H}_0, \quad \mathfrak{B} \approx 3\mu_0\mathfrak{H}_0, \quad \mathfrak{H} \approx \frac{3}{\mu_r}\mathfrak{H}_0.$$

Die Feststellung elementarer Physikbücher, das Weicheisen „sammle die Kraftlinien", erscheint damit sehr oberflächlich formuliert. Es soll deshalb der Verlauf der B-, M-, und H-Linien der Reihe nach untersucht werden.

Die Induktionslinien verlaufen im Eisen tatsächlich dichter als in Luft (in der Kugel etwa dreimal so dicht; im allgemeinen ist das Feld im Eisen jedoch inhomogen). Da die Induktion quellenfrei ist und die B-Linien geschlossen sind, „saugt" das Weicheisen die B-Linien der Umgebung ab.

Die M-Linien befinden sich nur im Innern des Weicheisens, da im umgebenden Vakuum bzw. der Luft keine molekularen Kreisströme vorhanden sind. Diese M-Linien entspringen den auf der Oberfläche des Stoffes vorhandenen, „scheinbaren" magnetischen Ladungen. Die Richtung der M-Linien ist der Richtung des äußeren Feldes gleich.

Aus denselben „scheinbaren" magnetischen Ladungen entspringen auch die H-Linien, nur in entgegengesetzter Richtung. Sie verlaufen im Innern des Stoffes gegen die Richtung des äußeren Feldes, besitzen jedoch außen eine das Feld verstärkende Komponente. Das Weicheisen „saugt" demnach die H-Linien des äußeren Feldes genauso an wie die B-Linien, doch sind innerhalb des Stoffes kaum H-Linien vorhanden, da sie an den scheinbaren magnetischen Ladungen auf der Oberfläche enden.

Die Abb. 329 zeigt auch, daß die scheinbaren Ladungen zwar nur die magnetische Feldstärke direkt beeinflussen, im Endergebnis aber dadurch auch die Verteilung der magnetischen Induktion geändert wird.

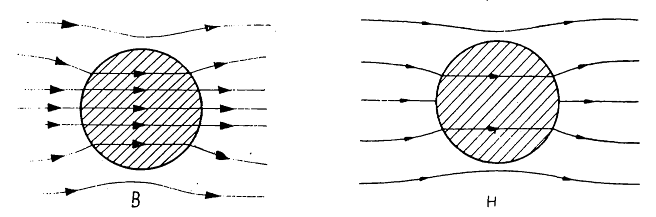


Abb. 329. Weicheisenkugel im homogenen magnetischen Feld

2. Es ist eine interessante historische Tatsache, daß Erscheinungen, die ursprünglich Anlaß zur Erforschung eines Wissensgebietes waren, in allen ihren Einzelheiten, oft sogar im wesentlichen, bis heute noch nicht geklärt sind. Dies gilt insbesondere für den Erdmagnetismus.

Das magnetische Feld der Erde kann in erster Näherung als Feld eines im Erdmittelpunkt gelegenen Dipols mit dem Dipolmoment

$$p_m = 8{,}1 \cdot 10^{25} \text{ el. magn. CGS}$$

beschrieben werden. Die Achse des Dipols ist gegen die geographische Achse um 11,5° geneigt (Abb. 330). Wodurch dieses Moment jedoch bedingt ist, ist zur Zeit noch eine offene Frage, obwohl eine ganze Anzahl von Theorien vorhanden sind. Ältere Theorien, die die Erde als großen künstlichen oder

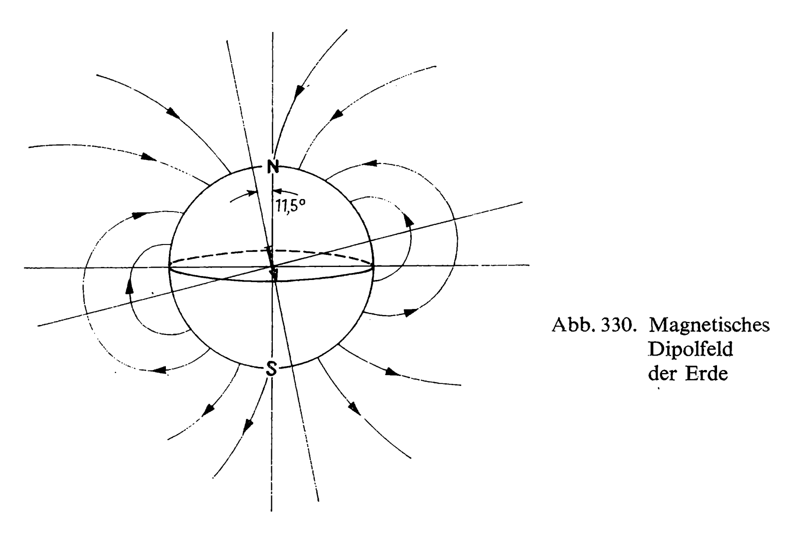


Abb. 330. Magnetisches Dipolfeld der Erde

natürlichen Permanentmagneten ansehen, mußten verworfen werden, da das Innere der Erde zu hohe Temperaturen für einen merklichen Ferromagnetismus besitzt. Es scheint, daß auch die originelle Theorie von BLACKETT nicht mit den neuen astronomischen Messungen übereinstimmt. BLACKETT postulierte als neues Naturgesetz, daß zu einer rotierenden Masse immer ein magnetisches Moment gehört:

$$\mathfrak{P}_m \approx 0{,}25 \frac{\sqrt{k}}{2c} \mathfrak{J}.$$

Hierbei bedeuten $\mathfrak{P}_m$ das magnetische, $\mathfrak{J}$ das mechanische Moment, k die Gravitationskonstante, c die Lichtgeschwindigkeit.

Die Grundlage für die heutigen Theorien ist die Vorstellung vom inneren Aufbau der Erde. Demnach besteht die Erde aus einem verhältnismäßig kleinen festen Kern, den eine Flüssigkeitsschale und schließlich eine feste äußere Schale umgeben.

Das magnetische Feld der Erde wird durch innere Ströme hervorgerufen. Auch diese Ströme können verschiedene Ursachen haben. Nach der einen Theorie verhält sich die Erde wie ein sehr komplizierter Generator mit Selbsterregung. Die Rolle des bewegten Leiters spielen hauptsächlich die Strömungen in der flüssigen Schale.

Neben diesen Effekten treten auch regionale und örtliche Variationen des Feldes auf, die manchmal auf das Vorhandensein größerer Lagerstätten schürfbarer Mineralien und Erze hinweisen.

Das ganze Feld dreht sich langsam von Ost nach West. Manche Tatsachen weisen darauf hin, daß das magnetische Feld der Erde in der Vergangenheit mit entgegengesetzter Polarität existiert hat.

5.25. Meßprinzipien der magnetischen Feldgrößen im Innern eines Stoffes

Es soll in das Innere eines Stoffes ein langer, röhrenförmiger Hohlraum geschnitten und dann der Wert der Induktion $\mathfrak{B}$ darin gemessen werden. Dadurch ist auch der Wert $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}/\mu_0$ bestimmt. Man nehme an, daß der so gemessene Vektor $\mathfrak{H}$ und die Achse der Röhre parallel sind. In diesem Fall ist die Feldstärke im Innern des Stoffes nahe der Wand des Hohlraumes genauso groß, da die Tangentialkomponente von $\mathfrak{H}$ kontinuierlich durch diese innere Oberfläche geht. Die Existenz dieses Hohlraumes wird keinen wesentlichen Einfluß auf den Wert der magnetischen Feldstärke haben, da zu den die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ bestimmenden Größen (die makroskopischen Ströme

und die durch Änderung von μ sich ergebenden Ladungen) sich lediglich das Feld der Ladungen an den beiden Stirnseiten des langen Hohlraumes gesellt. Wenn der Hohlraum genügend lang und schmal gemacht wird, ist dieser Einfluß der Endflächenladungen sehr klein und kann vernachlässigt werden.

Wird dagegen in einem schmalen zylindrischen Schlitz durch Messen gefunden, daß die Induktion senkrecht zur Grundfläche des Schlitzes steht, so ist damit die Induktion $\mathfrak{B}$ auch im Innern des Stoffes gemessen. Bekanntlich durchschreitet die Induktion die zu ihr senkrechte Fläche stetig. Das Ausschneiden des Schlitzes beeinflußt das ursprüngliche Feld nicht; denn die Induktion ist durch den Strom der äußeren Erregungsspule und durch die molekularen Kreisströme bedingt, so daß im Fall eines genügend kleinen Schlitzes die Wirkung der dort fehlenden molekularen Kreisströme vernachlässigt werden kann.

Auf Grund der vorangehenden Erörterungen kann die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Innern eines Stoffes im Prinzip wie folgt gemessen werden. Es werden in verschiedenen Richtungen lange und enge röhrenförmige Hohlräume geschnitten, und in jedem dieser Hohlräume wird die Induktion gemessen. Für denjenigen Meßwert, bei welchem die Richtung der gemessenen Induktion mit der Achsenrichtung des Rohres übereinstimmt, liefert das $1/\mu_0$-fache der gemessenen Induktion die Größe der Feldstärke und gibt zugleich deren Richtung an.

Zur Messung von $\mathfrak{B}$ werden schmale, verschieden gerichtete Schlitze geschnitten, und in jedem Schlitz wird die Induktion gemessen. Wenn in einem dieser Schlitze die Induktion senkrecht zur Grundfläche gerichtet ist, so stimmt die darin gemessene Induktion der Größe und der Richtung nach mit der Induktion im Innern der Materie überein.

Es muß betont werden, daß dies prinzipielle Methoden sind. In der Praxis pflegt man auf die im Innern des Stoffes herrschenden Verhältnisse aus den Ergebnissen der Messungen außerhalb des Stoffes zu schließen.

Wir sind bei den bisherigen Überlegungen vom Standpunkt des Ingenieurs ausgegangen, nach welchem die magnetischen Größen bei den Messungen und bei der Begriffsbildung mit den elektrischen Strömen in Beziehung zu setzen sind. Dieses Streben war gewissermaßen eine Rückwirkung der von seiten der Physiker zu starken Betonung der Rolle der magnetischen Ladung.

Da aber Elementarteilchen existieren (wie z. B. das Neutron), die ein magnetisches Moment besitzen, ohne elektrisch geladen zu sein, außerdem die die ferromagnetischen Erscheinungen hervorrufenden magnetischen Momente der Elektronen auch nicht durch rotierende Ladungen erklärt werden können, müssen wir heute die magnetischen Dipole als primär existierende physikalische Größen annehmen.

Bei der theoretischen und praktischen Messung des magnetischen Feldes nach der Kernresonanzmethode erlangen diese magnetischen Momente wieder große Bedeutung.

5.26. Der Vergleich des elektrischen und magnetischen Feldes

Dem Leser wird schon aufgefallen sein, daß zwischen den Kennwerten des elektrischen und des magnetischen Feldes eine große Ähnlichkeit besteht. Bisher wurde, besonders beim Entwickeln der Begriffe, jede einem Analogieschluß entlehnte Begründung bewußt vermieden (mit Ausnahme der homogen magnetisierten Kugel, doch ist dies eine Anwendung), da trotz aller Ähnlichkeit der Form nach das grundlegende physikalische Geschehen unterschiedlich ist. Wo aber das Problem bereits mathematisch formuliert vorliegt, hängt die Lösung lediglich von der Form der Gleichungen ab; in solchen Fällen kann die Lösung eines in ähnlicher Form existierenden anderen physikalischen Problems einfach durch Bezeichnungswechsel erhalten werden.

Nachstehend sollen die Eigenschaften der elektrischen und magnetischen Größen einander gegenübergestellt werden, um damit sowohl die formale Ähnlichkeit als auch den grundsätzlichen Unterschied zwischen diesen besser hervorheben zu können.

Zur eindeutigen Charakterisierung des magnetischen Feldes genügt prinzipiell die Angabe der Induktion $\mathfrak{B}$.	Zur eindeutigen Charakterisierung des elektrischen Feldes genügt prinzipiell die Angabe der Feldstärke $\mathfrak{E}$.
Die Induktion kann in jedem beliebigen Punkt des Raumes prinzipiell durch die Kraftwirkung mit Hilfe des Zusammenhanges $B = \left(\frac{M}{IA}\right)_{\max}$ gemessen werden.	Die Feldstärke kann in jedem beliebigen Punkt des Raumes prinzipiell durch die Kraftwirkung mit Hilfe des Zusammenhanges $E = \frac{F}{Q}$ gemessen werden.
Wird die Messung im Innern eines Stoffes durchgeführt, so schneidet man einen zu den Induktionslinien senkrechten Schlitz und mißt darin die Induktion.	Wird die Messung im Innern eines Stoffes durchgeführt, so schneidet man einen zu den Kraftlinien parallelen Schlitz und mißt darin die Feldstärke.

Die Induktion $\mathfrak{B}$ entsteht durch die in den äußeren Leitungen fließenden Makroströme und die im Innern der Stoffe fließenden molekularen Kreisströme gemeinsam und ist deshalb quellenfrei:

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 .$$

Der magnetisierte Stoff wirkt auf das ursprüngliche Feld, weil durch das Einschalten des Feldes im Stoff entweder Kreisströme entstehen oder die vorhandenen sich ordnen.

Die Magnetisierung des Stoffes, der Vektor

$$\mathfrak{M} ,$$

ist für dieses Ordnen charakteristisch.

Das Linienintegral des Vektors

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{M}$$

hängt entlang einer beliebigen geschlossenen Linie ausschließlich von den äußeren Makroströmen ab. Darum ist es empfehlenswert, den durch die Gleichung

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{M}}{\mu_0}$$

definierten Vektor $\mathfrak{H}$ einzuführen, da

$$\oint_L \mathfrak{H} \, d\mathfrak{l} = \int_A \mathfrak{G} \, d\mathfrak{A}$$

bzw. in Differentialform

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{G}$$

ist.

Die Feldstärke $\mathfrak{E}$ entsteht im Vakuum durch die gemeinsame Wirkung der an den Metallflächen oder in Isolierstoffen vorhandenen makroskopischen Ladungen und von den gebundenen Ladungen der Moleküle und ist deshalb wirbelfrei:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0 .$$

Der Isolierstoff wirkt auf das ursprüngliche Feld, weil durch Einschalten des Feldes die Ladungen im Stoff sich bewegen und Dipole entstehen oder die vorhandenen Dipole sich ordnen.

Die Polarisation des Stoffes, der Vektor

$$\mathfrak{P} ,$$

ist für dieses Ordnen charakteristisch.

Das Flächenintegral des Vektors

$$\varepsilon_0 \mathfrak{E} + \mathfrak{P}$$

hängt auf einer beliebigen geschlossenen Fläche ausschließlich von den Makroladungen ab. Darum ist es empfehlenswert, den durch die Gleichung

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E} + \mathfrak{P}$$

definierten Vektor $\mathfrak{D}$ einzuführen, da

$$\oint_A \mathfrak{D} \, d\mathfrak{A} = \int_V \varrho \, dV$$

bzw. in Differentialform

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho$$

ist.

Ist $\mathfrak{M}$ proportional zu $\mathfrak{B}$, so besteht zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ die Gleichung

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}.$$

Das Feld $\mathfrak{B}$ ist einfacher, es hat nur Wirbel, aber keine Quellen.

Das Feld $\mathfrak{H}$ hat Quellen und Wirbel.

Ist $\mathfrak{P}$ proportional zu $\mathfrak{E}$, so besteht zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ die Gleichung

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}.$$

Das Feld $\mathfrak{E}$ ist einfacher, es hat nur Quellen, aber keine Wirbel.

Das Feld $\mathfrak{D}$ hat Quellen und Wirbel.

6. Kraftwirkungen und Energieverhältnisse im elektromagnetischen Feld

6.1. Aus der Definitionsgleichung der elektrischen Feldstärke unmittelbar berechenbare Kraftwirkungen

Auf eine punktförmige Ladung Q wirkt im Feld $\mathfrak{E}$ die Kraft

$$\mathfrak{F} = Q\mathfrak{E}.$$

Wenn die Ladung im Feld mit einer Ladungsdichte ϱ gleichmäßig verteilt ist, befindet sich in einem beliebigen Volumen dV die Ladung $\varrho\, dV$. Die Kraft, die auf die Ladung wirkt, beträgt bei konstanter Feldstärke

$$d\mathfrak{F} = \varrho \cdot dV \cdot \mathfrak{E}.$$

Die Kraft pro Volumeneinheit, d. h. die Kraftdichte, ist

$$\mathfrak{f} = \frac{d\mathfrak{F}}{dV} = \varrho\mathfrak{E}. \tag{6.1.1}$$

Es soll sich auf dem Stück dA einer Metallfläche gemäß Abb. 331 eine Ladungsdichte σ befinden. Die zugehörige Feldstärke sei $\mathfrak{E}$. Nach dem Vorstehenden wäre anzunehmen, daß auf die Ladung $\sigma \cdot dA$ eine Kraft $\sigma \cdot dA \cdot E$ wirkt. Das ist jedoch nicht richtig. Die Flächenladungsdichte kann man sich als eine zweidimensional entartete Raumladung mit einer differentiell kleinen Schichtdicke vorstellen. Die Feldstärke im Innern des Volumens $dl \cdot dA$ ist

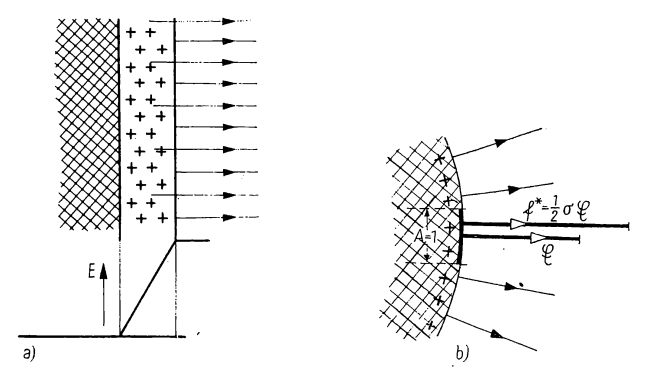


Abb. 331. Kraftwirkung im elektrischen Feld

dann keineswegs mehr konstant, sondern wächst von der inneren Seite der Schicht, wo sie Null beträgt, bis zum Wert E auf dem Außenrand an. Bei Annahme einer homogenen Ladungsverteilung wächst das Feld linear an, sein Mittelwert ist dann $E/2$. Mit diesem Mittelwert ist die Oberflächenladung zu multiplizieren:

$$f^* = \frac{dF}{dA} = \frac{1}{2}\sigma E. \tag{6.1.2}$$

Wird noch $\sigma = D$ eingesetzt, so erhält man bei Metallen für die Kraftdichte pro Flächeneinheit

$$f^* = \frac{1}{2} ED. \tag{6.1.3}$$

Es soll die Kraft untersucht werden, die auf den Dipol mit dem Moment $\mathfrak{p}$ in der Anordnung der Abb. 332 wirkt. Im homogenen Feld beeinflußt die beiden Ladungen eine gleichgroße, aber entgegengesetzt wirkende Kraft,

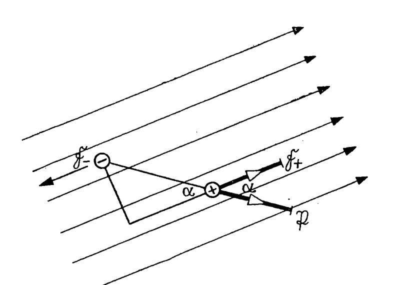


Abb. 332. Dipol im homogenen Feld

deren Resultierende daher gleich Null ist. Es tritt aber ein mechanisches Drehmoment von der Größe

$$M = lQE \sin\alpha = pE \sin\alpha$$

auf, das den Dipol um eine Achse zu drehen sucht, die auf den Kraftlinien und der Dipolachse senkrecht steht. Das Moment ist demnach ein Vektor gemäß

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{E}. \tag{6.1.4}$$

Da die Entfernung zwischen den Ladungen des Dipols sehr klein ist, ist die Änderung des elektrischen Feldes $\mathfrak{E}$ längs des Dipols vernachlässigbar klein, so daß $\mathfrak{E}$ als homogen betrachtet werden kann. Die Formel (6.1.4) darf daher in der Praxis in den meisten Fällen ohne Bedenken angewendet werden.

Ein polarisiertes Dielektrikum kann als ein kleiner Dipol aufgefaßt werden. So kann das elektrische Feld z. B. mit Hilfe von kleinen Strohhalmen, die sich in die Richtung des Feldes einstellen, gemessen werden (Abb. 333).

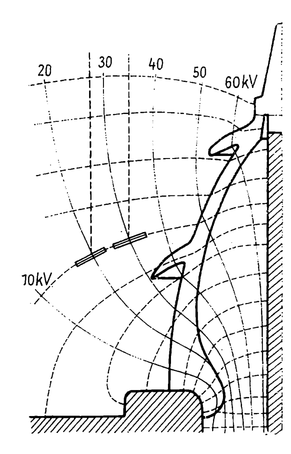


Abb. 333. Ausmessung des elektrischen Feldes mit kleinen Strohhalmen (nach ROTH)

Beispiele und Ergänzungen

1. Eine punktförmige Ladung $Q = 2 \cdot 10^{-9}$ C sei von einem homogenen Block um $d = 3$ cm entfernt. Wie groß ist die Kraft, die auf die Ladung wirkt, wenn das Material des Blockes a) Metall, b) Porzellan mit $\varepsilon_r = 6$ ist?

a) Im Fall eines Metalls ist an der Stelle der punktförmigen Ladung das Feld so groß, als ob es von einer Ladung $-Q = -2 \cdot 10^{-9}$ C in der Entfernung $2d = 6$ cm erzeugt worden wäre. Die Kraft ist

$$F = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(2d)^2} = 9 \cdot 10^9\,\frac{4 \cdot 10^{-18}}{36 \cdot 10^{-4}} = 10^{-5}\ \text{N}.$$

b) Beim Dielektrikum ist an der Stelle der Punktladung die Feldstärke so groß, als ob sie durch eine Ladung Q' in der Entfernung $2d = 6$ cm erzeugt worden wäre:

$$Q' = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\,Q = -\frac{6-1}{6+1} \cdot 2 \cdot 10^{-9} = -0{,}715 \cdot 2 \cdot 10^{-9}\ \text{C}.$$

Die Kraft ist demnach das 0,715fache der zuerst berechneten:

$$F = 0{,}715 \cdot 10^{-5}\ \text{N}.$$

2. Es wurde festgestellt, daß auf einen Dipol im homogenen Feld ein Moment wirkt. Wenn das Feld so stark inhomogen ist, daß sich innerhalb des Abstandes zwischen den beiden Ladungen das Feld merklich ändert,

erhalten wir nicht nur ein Drehmoment, sondern auch eine Kraft, da sich die Kräfte auf die beiden Ladungen des Dipols nicht mehr aufheben. Die Differenz der beiden Kräfte, d. h. die auf den Dipol wirkende resultierende Kraft, ist

$$Q(\mathfrak{E} + d\mathfrak{E} - \mathfrak{E}) = Q d\mathfrak{E},$$

wobei $d\mathfrak{E}$ die Änderung des Feldes entlang der Strecke $d\mathfrak{l}$ bedeutet. Diese ist nach der Definition des Ableitungstensors

$$d\mathfrak{E} = \mathfrak{T}_{d\mathfrak{l}}^{d\mathfrak{E}}\, d\mathfrak{l}.$$

Schließlich gewinnt man die Kraft

$$\mathfrak{F} = Q\mathfrak{T}_{d\mathfrak{l}}^{d\mathfrak{E}}\, d\mathfrak{l} = \mathfrak{T}_{d\mathfrak{l}}^{d\mathfrak{E}}\, \mathfrak{p}.$$

Diese Gleichung kann im Fall eines elektrostatischen Feldes umgeschrieben werden, wie durch Zerlegen in Komponenten leicht nachgeprüft werden kann. Sie lautet dann

$$\mathfrak{F} = \operatorname{grad} \mathfrak{E}\mathfrak{p}.$$

Es wird später gezeigt werden, daß $\mathfrak{E}\mathfrak{p}$ die potentielle Energie eines in das Kraftfeld gebrachten Dipols ist.

3. Auf den Dipol wirkt die Kraft in der einen oder anderen Richtung, je nachdem, wie sich der Dipol den Kraftlinien gegenüber einstellt. Wenn ein Isolatorstab also drehbar in ein stark inhomogenes Feld gebracht wird, stellt sich der Stab in Richtung der Verbindungslinie der beiden Elektroden ein. Falls aber das äußere Feld mit einem Stoff ausgefüllt wird, der eine größere Dielektrizitätskonstante als der Stab besitzt, stellt sich dieser senkrecht zur Verbindungslinie beider Elektroden ein.

4. Die Kraftwirkung des elektrischen Feldes spielt für die Bewegungen von Verunreinigungen, wie z. B. Wassertröpfchen in flüssigen Isolatoren, eine

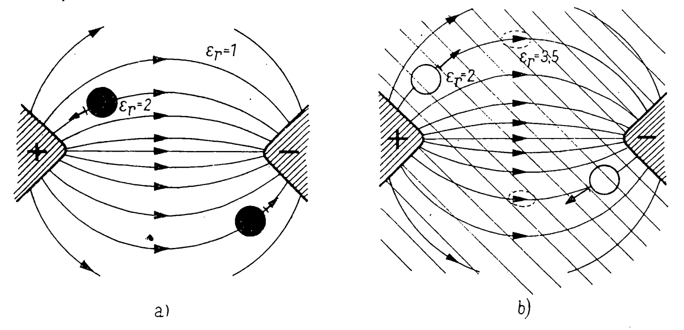


Abb. 334. Kraftwirkungen auf Stoffe mit verschiedenen Dielektrizitätskonstanten im inhomogenen Feld

große Rolle. Da die Dielektrizitätskonstante des Wassers sehr groß ist, streben die Tröpfchen nach Orten größerer Feldstärke, eine Luftblase jedoch wandert stets in Gebiete schwächerer Feldstärke (Abb. 334).

6.2. Kraftwirkungen im magnetischen Feld

Aus der Definition des Induktionsvektors folgt, daß auf einen Stromkreis mit dem Strom I, der von einer Fläche A umgeben wird, in einem homogenen Feld das Drehmoment

$$\mathfrak{M} = I\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$$

wirkt, das bestrebt ist, den Stromkreis in die Richtung des magnetischen Feldes zu drehen. Wenn die Fläche des Stromkreises und die Kraftlinien parallel liegen, nimmt das Moment seinen Höchstwert

$$|\mathfrak{M}| = IAB$$

an.

Ist das Feld inhomogen, so sind diese Formeln nur dann gültig, wenn die Abmessungen des Stromkreises so klein sind, daß die Änderung der Induktion B in diesem Bereich vernachlässigt werden kann.

Wie bereits gesagt, stellt man sich das Zustandekommen dieses Momentes so vor, daß das Feld auf das vom Strom durchflutete Leitungselement $d\mathfrak{l}$ die Kraft

$$d\mathfrak{F} = Id\mathfrak{l} \times \mathfrak{B}$$

ausübt. Die Größe dieser Kraft ist

$$dF = I \cdot dl \cdot B \sin\varphi,$$

also dem Strom, der Länge der Leitungsstrecke, der Induktion und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels proportional. Ihre Richtung ist vertikal zu den Richtungen von $d\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{B}$, und $d\mathfrak{l}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{F}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Es wurde bereits gesagt, daß eine Ladung Q, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt, bezüglich ihres magnetischen Eigenfeldes und der Kraftwirkung gleich einem Stromelement

$$Id\mathfrak{l} = Q\mathfrak{v}$$

ist. Somit ist die Kraft, die auf eine sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegende Ladung Q in einem Feld von der Induktion $\mathfrak{B}$ wirkt (LORENTZ-Kraft)

$$\mathfrak{F} = Q(\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}).$$

Demnach wirkt also in einem Feld, wo eine elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ und eine Induktion $\mathfrak{B}$ existieren, auf die Ladung Q die Kraft

$$\mathfrak{F} = Q\mathfrak{E} + Q\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}.$$

Die Wirkung zweier Stromkreise aufeinander kann daher berechnet werden, indem man zuerst die von dem einen Stromkreis an der Stelle des anderen erzeugte Feldstärke bestimmt, danach die auf die einzelnen Stromelemente wirkenden Kraftelemente berechnet und diese dann vektoriell addiert.

Es soll als einfaches, aber in der Praxis sehr wichtiges Beispiel die Wechselwirkung zweier gerader, unendlich langer Leiter bestimmt werden, wenn in beiden Leitern gleiche Ströme fließen, zuerst in gleicher, dann in entgegengesetzter Richtung (Abb. 335). Das Feld des Leiters (1) am Ort des Leiters (2) beträgt

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi\, d}.$$

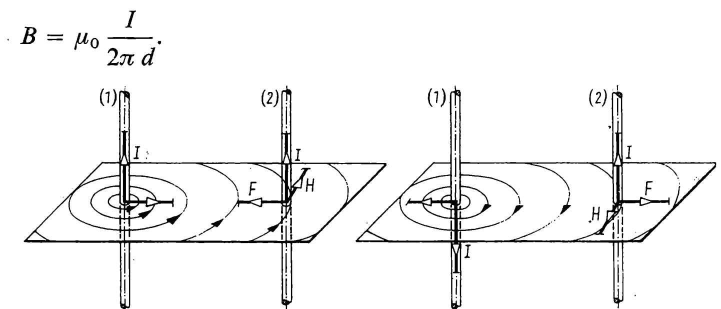


Abb. 335. Wechselwirkung zweier paralleler Leiter

Auf ein Stück des Leiters (2) von der Länge l wirkt dann die Kraft

$$F = BIl = \mu_0 \frac{I^2 l}{2\pi\, d}.$$

Natürlich wirkt die Leitung (2) mit derselben Kraft auf die Leitung (1).

Die Richtung der Kraftwirkungen ergibt sich aus der Reihenfolge (I; B; F) des orthogonalen Rechtssystems, d. h., Ströme gleicher Richtung ziehen sich an, und Ströme entgegengesetzter Richtung stoßen sich ab.

Beispiele und Ergänzungen

1. Die sich ergebende Kraft ist im allgemeinen gering. Beträgt der Abstand zwischen den beiden Leitern $d = 1$ m, der Strom $I = 1$ A, so wirkt auf die Einheitslänge des Leiters die Kraft

$$F = \mu_0 \frac{1 \cdot 1}{2\pi \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-7}\ \text{N}.$$

Dies ist selbstverständlich, da diese Gleichung die Einheit der Stromstärke definierte.

In Sonderfällen kann die Kraft auch sehr beträchtlich sein. Für $I = 10^5$ A, $d = 0{,}5$ m erhält man z. B.

$$F = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{10^{10} \cdot 1}{2\pi \cdot 0{,}5} = 4 \cdot 10^3 \text{ N} \approx 400 \text{ kp}.$$

Eine so große Stromstärke kann kurzzeitig in unmittelbarer Nähe eines Kraftwerkes durch Kurzschluß in den Leitungsschienen oder in den Wicklungen von Hochleistungstransformatoren auftreten. Wenn die Leitungen also nicht für solche Kraftwirkungen konstruiert sind, kann großer Schaden entstehen.

Von diesen Sonderfällen abgesehen, sind die Kraftwirkungen bei Stromkreisen in Luft gering, verglichen mit den Kraftwirkungen, die bei Anwesenheit von ferromagnetischen Stoffen auftreten können. Sie lassen sich aber einfach berechnen, da sie nicht von der Qualität des Stoffes, sondern nur von den Strömen abhängen. Deshalb wird bei Präzisionsinstrumenten (Strom-, Leistungsmesser) die elektrodynamische Wirkung des Stromes oft verwendet.

2. Im allgemeinen Fall werden die beiden Stromkreise in Elemente mit den Längen $d\mathfrak{l}_1$ und $d\mathfrak{l}_2$ (Abb. 336) unterteilt. Das magnetische Feld der Strecke $d\mathfrak{l}_1$, welche der Strom I_1 durchfließt, ist an der Stelle des Leitungselementes $d\mathfrak{l}_2$ im Sinne des BIOT-SAVARTschen Gesetzes

$$(d\mathfrak{B})_1^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\mathfrak{l}_1 \times \mathfrak{r}^0}{r^2}.$$

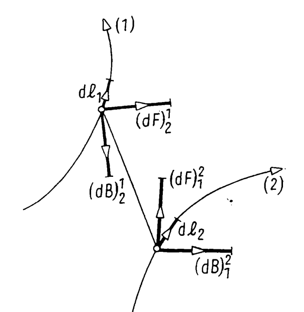


Abb. 336. Wechselwirkung zweier beliebiger Stromkreise

So wirkt auf das Element $d\mathfrak{l}_2$ die Kraft

$$(d\mathfrak{F})_1^{(2)} = I d\mathfrak{l}_2 \times (d\mathfrak{B})_1^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{d\mathfrak{l}_2 \times (d\mathfrak{l}_1 \times \mathfrak{r}^0)}{r^2}.$$

Umgekehrt erzeugt der im Leiter $d\mathfrak{l}_2$ fließende Strom I_2 an der Stelle $d\mathfrak{l}_1$ die Induktion

$$(d\mathfrak{B})_2^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \frac{\mathfrak{r}^0 \times d\mathfrak{l}_2}{r^2},$$

und die Kraft wird

$$(d\mathfrak{F})_2^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{d\mathfrak{l}_1 \times (\mathfrak{r}^0 \times d\mathfrak{l}_2)}{r^2}.$$

Aus der Abbildung und auch aus den erhaltenen Gleichungen sieht man sofort, daß

$$(d\mathfrak{F})_1^{(2)} \neq (d\mathfrak{F})_2^{(1)}$$

ist, daß also hier das NEWTONsche Prinzip actio = reactio nicht gilt. Es kann aber gezeigt werden, daß bei der Berechnung der auf dem ganzen Stromkreis wirkenden Kraft dieses Prinzip richtig ist, da der erste Stromkreis mit derselben Kraft auf den zweiten wirkt wie der zweite auf den ersten.

Diese Frage zu behandeln ist deshalb interessant, weil AMPÈRE die Wechselwirkung der Stromkreise so angeschrieben hatte, daß auch die auf die Stromelemente wirkenden Kräfte das NEWTONsche Prinzip befriedigten.

Dies ergab natürlich ein von der obigen Formel abweichendes Gesetz. Für die Gesamtkraftwirkung erhielt er aber den richtigen Wert. Es folgt daraus, daß bei geschlossenen Stromkreisen die Aufteilung des Leiters in einzelne Stromelemente nicht eindeutig durchgeführt werden kann.

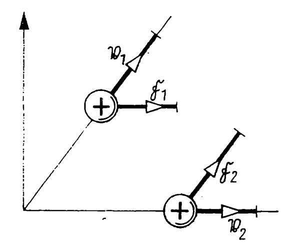


Abb. 337. Wechselwirkung zweier bewegter Ladungen

Es ergibt sich nun das Problem, daß die beiden in Abb. 337 gekennzeichneten bewegten Ladungen mit verschiedenen Kräften aufeinander wirken, so daß die Resultierende der inneren Kräfte nicht Null wird. Es scheint also der Impulserhaltungssatz in Frage gestellt. Hier zeigt sich bereits die aktive Rolle des magnetischen Feldes als Partner und Impulsträger bei der Wechselwirkung geladener Teilchen. Aus den späteren Ausführungen geht dann hervor, daß gerade der Impuls des elektromagnetischen Feldes die Gültigkeit des Impulserhaltungssatzes und des Satzes actio = reactio gewährleistet.

6.3. Die Energie des elektrostatischen Feldes

Das elektrische Feld entsteht dadurch, daß an einzelne Stellen des Feldes positive, an andere Stellen dagegen negative Ladungen gebracht werden. Dabei ist selbstverständlich eine Arbeit zu leisten. Die Energie des Feldes ist deshalb gleich der Arbeit, die zur Erzeugung dieses Feldes aufgewendet wurde. Diese Arbeit kann wieder zurückgewonnen werden.

Zuerst wird die Energie eines geladenen Kondensators berechnet, weil hier die Verhältnisse am einfachsten liegen. Dazu muß festgestellt werden, wieviel Arbeit benötigt wird, um einen Kondensator auf eine bestimmte Spannung aufzuladen oder mit einer bestimmten Ladung zu versehen.

Das Aufladen des Kondensators kann man sich so vorstellen, daß nacheinander sehr weit vom Kondensator entfernt liegende Ladungselemente $+dq$ und $-dq$ auf die beiden Platten des Kondensators gebracht werden. Man untersucht dann, wieviel Arbeit benötigt wurde, die ganze Ladungsmenge Q auf die Kondensatorplatten zu schaffen.

Auf den Platten mögen sich bereits die Ladungen $+q$ und $-q$ befinden. Die weiteren Ladungselemente $+dq$ und $-dq$ werden längs der Wege auf die Platten gebracht, wie sie in Abb. 338 gezeichnet sind. Entlang der mittleren Äquipotentialfläche bringt man die Ladungen zum Punkt A und von dort die Ladung $+dq$ auf dem Weg $AB = \frac{l}{2}$ und die Ladung $-dq$ auf dem Weg $AC = \frac{l}{2}$ auf die eine bzw. andere Platte. Bis zum Punkt A wird keine Arbeit geleistet, weil die Ladungen entlang der Äquipotentialfläche bewegt wurden.

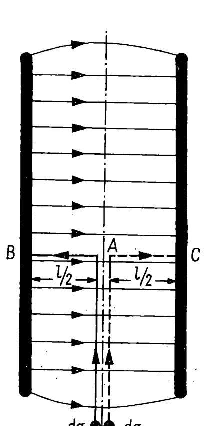


Abb. 338. Aufladung eines Kondensators

Auf dem Wege zwischen den Platten ist die Arbeit

$$E\,dq\,\frac{l}{2} + dq\,\frac{l}{2}\,E = dq\,lE = dq\,U = dq\,\frac{q}{C}$$

geleistet worden. Der Energiezuwachs des Kondensators ist also gleichfalls

$$dW = U\,dq = \frac{q}{C}\,dq.$$

Die Gesamtenergie wird demnach

$$W = \int dW = \int_0^Q U\,dq = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}.$$

Wegen

$$U = \frac{Q}{C}$$

kann geschrieben werden

$$W = \frac{1}{2}\,CU^2.$$

Dieser Ausdruck ist auch dann gültig, wenn das Volumen zwischen den Platten mit einem Dielektrikum ausgefüllt ist. Die Anwesenheit des Dielektrikums ist schon im Wert der Kapazität berücksichtigt.

Beispiele und Ergänzungen

1. Ein auf 1000 V aufgeladener Kondensator von 1 μF trägt die Energie

$$W = \frac{1}{2}\,CU^2 = \frac{1}{2}\cdot 10^{-6}\cdot 10^6\ \text{Ws} = 0{,}5\ \text{Ws}.$$

Es gibt Kondensatoren, die bei 0,1 μF Kapazität auf $U = 2\cdot 10^5$ V aufgeladen werden können. Ihre Energie beträgt dann

$$W = 2000\ \text{Ws}.$$

Mit dieser Energie kann eine Glühlampe von 40 W fast eine Minute lang gespeist werden.

2. Die Energie eines aufgeladenen Kondensators mit der Kapazität C ist

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}.$$

Wird diesem Kondensator ein zweiter ungeladener Kondensator mit gleicher Kapazität parallelgeschaltet, so verteilt sich die Ladung gleichmäßig auf beide Kondensatoren, wird also auf jedem Kondensator $\frac{Q}{2}$ betragen. Die Gesamtenergie der Schaltung ist

$$W = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{2}\right)^2 \frac{1}{C} = \frac{1}{4}\frac{Q^2}{C}.$$

Das ist gerade die Hälfte der ursprünglichen Energie. Hier scheint ein Widerspruch zum Prinzip der Energieerhaltung vorzuliegen.

Gibt es im Kreis ohmsche Widerstände, so geht die Hälfte der Energie in Form von Wärmeenergie in den Verbindungsleitungen der Kondensatoren und im Dielektrikum verloren. Sind dagegen im idealen Fall keine ohmschen Widerstände im Kreis, so kann der Gleichgewichtszustand nicht zustande kommen. Wenn sich die Ladungen gerade gleichmäßig auf beide Kondensatoren verteilen, ist der Strom am größten, und ein beträchtlicher Teil der Energie findet sich im magnetischen Feld wieder und geht dann weiter auf den Kondensator über, dessen Energie auch vorher zugenommen hat. Die Energie wird also einmal in dem einen Kondensator, dann wieder im anderen gleich $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ sein; sie wandert periodisch hin und her.

Ein analoger Vorgang spielt sich auch in zwei kommunizierenden Gefäßen ab, wenn zu Beginn nur das eine Gefäß mit Flüssigkeit gefüllt ist. Gäbe es keine Reibungsverluste, so würde die Flüssigkeit ständig aus dem einen Gefäß in das andere strömen, denn die kinetische Energie der Wasserteilchen ist dann am größten, wenn zwischen ihnen kein Unterschied in der potentiellen Energie besteht.

3. Die Halbmesser der Elektroden eines Kugelkondensators seien r_a bzw. r_i. Die Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums sei ε, die Leitfähigkeit γ. Im Zeitpunkt $t = 0$ sei die Ladung der Elektroden Q_0. Die elektrostatische Energie in diesem Zeitpunkt ist

$$W_{e0} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C} = \frac{Q_0^2}{8\pi\,\varepsilon}\,\frac{r_a - r_i}{r_a r_i}$$

wegen

$$C = 4\pi\,\varepsilon\,\frac{r_a r_i}{r_a - r_i}.$$

Die durch die Ladung erzeugte Feldstärke im Dielektrikum ist

$$E = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\frac{Q_0}{r^2} \qquad (r_i \leqq r \leqq r_a),$$

die Stromdichte also

$$G = \gamma E = \frac{\gamma}{4\pi\,\varepsilon}\frac{Q_0}{r^2}.$$

Die Ladung nimmt exponentiell mit der Zeit ab:

$$Q = Q_0 e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t}.$$

Die elektrostatische Energie ist demnach eine Funktion der Zeit:

$$W_e(t) = \frac{Q_0^2}{8\pi\,\varepsilon}\frac{r_a - r_i}{r_a r_i}\,e^{-2\frac{\gamma}{\varepsilon}t},$$

gleichfalls die Stromdichte

$$G(r, t) = \frac{\gamma}{4\pi\,\varepsilon}\frac{Q_0}{r^2}\,e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t}.$$

Die Wärmeentwicklung während $t = 0$ bis $t = t$ beträgt

$$W_w(t) = \int_0^t \int_V \frac{1}{\gamma} G^2(r, t)\, dV \cdot dt = \frac{\gamma Q_0^2}{(4\pi\,\varepsilon)^2}\int_0^t \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r^4}\, e^{-2\frac{\gamma}{\varepsilon}t} \cdot 4\pi\, r^2\, dr\, dt$$

$$= \frac{\gamma Q_0^2}{4\pi\,\varepsilon^2}\left[-\frac{1}{r}\right]_{ri}^{r_a}\left(-\frac{\varepsilon}{2\gamma}\right)\left[e^{-2\frac{\gamma}{\varepsilon}t}\right]_0^t = \frac{Q_0^2}{8\pi\,\varepsilon}\frac{r_a - r_i}{r_a r_i}\left[1 - e^{-2\frac{\gamma}{\varepsilon}t}\right].$$

Die Summe der elektrostatischen und der Wärmeenergie ist konstant und gleich der elektrostatischen Anfangsenergie oder gleich der bis $t \to \infty$ sich entwickelnden Wärmeenergie:

$$W_e + W_w = \frac{Q_0^2}{8\pi\,\varepsilon}\frac{r_a - r_i}{r_a r_i} = W_{e0} = W_{w\infty}.$$

6.4. Die Energiedichte des elektrischen Feldes

Mit

$$U = lE \quad \text{und} \quad C = \varepsilon\frac{A}{l}$$

kann man für die Energie des Plattenkondensators schreiben

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{A}{l}l^2E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 V.$$

$Al = V$ ist das Volumen des Dielektrikums im Kondensator.

Diese Gleichung läßt sich so deuten, daß überall im Raum, wo eine Feldstärke E besteht, auch eine Energie vorhanden ist. Die Energiedichte ist

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED. \tag{6.4.1}$$

Ihre Maßeinheit ist $\mathrm{Ws/m^3}$, die auf die Volumeneinheit entfallende Energie.

Die Gleichung (6.4.1) ist viel allgemeingültiger, als man aus der einfachen Herleitung schließen möchte. Die Experimente bewiesen nämlich, daß sie stets und überall gilt. In der Elektrostatik kann die Energie des Kondensators natürlich sowohl aus $\frac{1}{2}CU^2$ wie auch aus $\frac{1}{2}\varepsilon E^2 V$ berechnet werden; zahlenmäßig erhält man denselben Wert.

Jeder dieser Ausdrücke kann aber verschieden gedeutet werden. Der erste bringt nämlich die Energie mit den Ladungen an den Leitern und mit der Spannungsdifferenz zwischen den Leitern in Zusammenhang. Hier sind also der Leiter und die Ladung maßgebend. Es kann daher gesagt werden, daß dort, wo eine elektrische Ladung vorhanden ist, auch elektrische Energie existiert. Im Ausdruck $\frac{1}{2}\varepsilon E^2 V$ treten das Volumen des Dielektrikums und die im Dielektrikum befindliche Feldstärke auf. Dies bedeutet, daß Energie dort vorhanden ist, wo eine Feldstärke besteht. Diese beiden Auffassungen ergeben in der Elektrostatik dieselben Zahlenwerte, und es ist Ansichtssache, welcher von beiden der Vorzug zu geben ist. In sehr rasch wechselnden Feldern bleibt jedoch der Erfahrung nach nur der zweite Ausdruck sinnvoll. Deshalb darf wohl nur dieser als der allgemeingültige angesehen werden.

6.5. Die Berechnung der Kraftwirkung aus dem Energieausdruck

Zwei Platten eines geladenen Kondensators, d. h. zwei mit einer konstanten Flächenladung σ versehene Platten, ziehen sich an. Diese Anziehungskraft könnte man prinzipiell auch mit Hilfe des COULOMBschen Gesetzes berechnen, doch wäre dies zu kompliziert. Einfacher gelangt man durch den Ausdruck für die Energie zum Ziel. Es sei angenommen, daß – bei konstanter Ladung des Kondensators – die eine Platte um dl senkrecht zu sich selbst verschoben wird. Hierfür ist eine Kraft notwendig und somit auch eine Arbeit zu leisten. Dabei ändert sich natürlich auch der Energieinhalt des Kondensators. Bei konstanter elektrischer Feldstärke wird der Energieinhalt um das in der Abb. 339 schraffierte Volumen vergrößert:

$$dW = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \, dl \, A.$$

Die aufgewendete Arbeit ist

$$F \cdot dl.$$

Nach dem Energieerhaltungssatz sind beide Ausdrücke gleich:

$$\frac{1}{2} \varepsilon E^2 \, dl \, A = F \, dl,$$

Abb. 339. Kraftwirkung auf die Elektrode eines Plattenkondensators

so daß sich für die auf die Flächeneinheit der Kondensatorplatte wirkende Kraft (Normalspannung auf der Kondensatorplatte)

$$f^* = \frac{F}{A} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} ED \tag{6.5.1}$$

ergibt. Diese Gleichung hatten wir bereits am Anfang des Kapitels als Gleichung (6.1.3) gefunden.

Es wurde bisher vorausgesetzt, daß die Ladung, also auch E und D, konstant bleibt. Wenn aber der Kondensator an eine konstante Spannung gelegt wird, ändern sich Feldstärke und Ladung, und die Energiegleichung erhält die etwas allgemeinere Fassung

$$\begin{aligned} dW = d\left(Al \frac{1}{2} \varepsilon E^2\right) &= A \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \, dl + AlE \cdot d(\varepsilon E) \\ &= A \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \, dl + AlE \, d\sigma. \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

Die Energieänderung des Feldes setzt sich demnach aus zwei Teilen zusammen: Der erste Teil bedeutet die Arbeit der äußeren Kräfte, der zweite Teil kann bei Beachtung der Zusammenhänge $A d\sigma = dQ$ und $lE = U$ auch in der Form UdQ geschrieben werden. Das ist gerade die Arbeit, die der äußere Stromkreis geleistet hat, als die Entfernung der Platten vergrößert oder verringert wurde. Wenn man statt der äußeren Kraft die dieser der Größe nach

gleiche, aber der Richtung nach entgegengesetzte Kraft $A \cdot \frac{1}{2} \varepsilon E^2$ einführt, so schreibt sich die Energiegleichung in der Form

$$dW = -Fdl + UdQ. \qquad (6.5.3)$$

Es sei nun angenommen, daß die Ladung konstant gehalten wird, also für die Änderung der Feldenergie nur die Kraft zur Verfügung steht. Etwas Neues tritt nur dann auf, wenn angenommen wird, daß die Dielektrizitätskonstante von der Dichte des Dielektrikums oder von den mechanischen Spannungen im Innern des Dielektrikums abhängt.

Im einfacheren Falle ist die Änderung der Kondensatorenergie bei einer Verschiebung der Platten um dl

$$\frac{d(\frac{1}{2}Al\varepsilon E^2)}{dl}\,dl = \frac{1}{2}A\varepsilon E^2\,dl + \frac{1}{2}AlE^2\frac{d\varepsilon}{dl}\,dl.$$

Ist die Dichte des Stoffes zwischen den Kondensatorplatten δ, so ergibt das Produkt $Al\delta$ die gesamte Stoffmenge m:

$$Al\delta = m; \quad l = \frac{m}{A\delta}; \quad dl = -\frac{m}{A}\frac{d\delta}{\delta^2} = -l\frac{d\delta}{\delta}.$$

Setzt man dies in die vorhergehende Gleichung ein, so wird die zusätzliche Energieänderung pro Längeneinheit, also die zusätzliche Kraft, welche gerade eine Folge der Abhängigkeit von ε von der Dichte ist,

$$F = \frac{1}{2}AlE^2\delta\frac{d\varepsilon}{ld\delta} = \frac{1}{2}AE^2\delta\frac{d\varepsilon}{d\delta}.$$

Diese Kraftwirkung bedingt das Auftreten der Elektrostriktion. Das bedeutet, daß sich bei einem im elektrischen Feld gezogenen oder zusammengedrückten Stab die Polarisation ändert und demnach gegenüber dem spannungsfreien Zustand eine Mehrladung auf der Oberfläche auftritt. Die umgekehrte Erscheinung ist ebenfalls möglich: Die Länge des Stabes ändert sich im elektrischen Feld quadratisch mit der Feldstärke, d. h. unabhängig von der Richtung von $\mathfrak{E}$. Hierdurch weicht sie augenscheinlich von der reziproken piezoelektrischen Erscheinung ab. Eine ähnliche Erscheinung, die Magnetostriktion, tritt auch bei ferromagnetischen Stoffen im magnetischen Feld auf.

6.6. Die Kraftwirkung in inhomogenen Isolatoren

Es soll die Kraftwirkung an den Grenzflächen eines vertikal zu den Kraftlinien eines Kondensators geschichteten Isolators berechnet werden (Abb. 340). Es ist bereits bekannt, daß die Kraftwirkungen hier auftreten, weil an den Grenz-

flächen freie Ladungen entstehen, auf welche das Feld einwirkt. Wir denken uns zwischen die beiden Dielektrika eine Metallfolie gelegt. Dadurch ändern sich die elektrischen Verhältnisse nicht, weil die Folie in einer Äquipotentialfläche liegt. Sie wird also die gemeinsame Platte der beiden auf diese Weise entstandenen Kondensatoren sein. Auf die Metallfolie wirken von links und rechts verschiedene Kräfte. Die spezifischen Kräfte sind

$$f_1 = -\frac{1}{2} DE_1; \quad f_2 = \frac{1}{2} DE_2.$$

Die Resultierende ist

$$f = f_1 + f_2 = \frac{1}{2} D(E_2 - E_1) = \frac{1}{2} \varepsilon_2 E_2^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_1^2$$

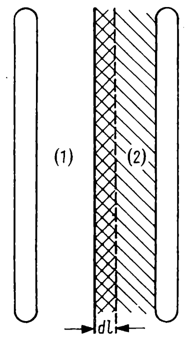
$$= \frac{1}{2} D^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

Die Kraft steht senkrecht auf der Trennfläche und zeigt gegen das Dielektrikum mit der kleineren Dielektrizitätskonstanten. Sie ist demnach so gerichtet, daß sie den ganzen Kondensator mit dem Dielektrikum der größeren Dielektrizitätskonstante auszufüllen und damit den Energieinhalt des Kondensators zu vermindern sucht. Bei konstant gehaltener Ladung ist die Energie des von einem Isolator mit größerer Dielektrizitätskonstante gänzlich ausgefüllten Kondensators gemäß der Gleichung

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

kleiner.

Aus dem Ausdruck für die Energie kann die Kraft ebenfalls leicht bestimmt werden. Wenn die Grenzfläche um dl verschoben wird (Abb. 340), ändert sich



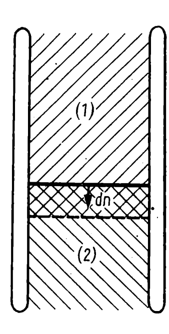


Abb. 340 (links). Kraftwirkung bei quergeschichtetem Dielektrikum

Abb. 341 (rechts). Kraftwirkung bei längsgeschichtetem Dielektrikum

die Energie von $\frac{1}{2}\, dl\, \varepsilon_2 E_2^2 A$ auf $\frac{1}{2}\, dl\, \varepsilon_1 E_1^2 A$. Die Energieänderung ist also

$$dW = \frac{1}{2}\, dl\, A(\varepsilon_1 E_1^2 - \varepsilon_2 E_2^2) = -fAdl.$$

Wir betrachten nun den Fall eines parallel zu den Kraftlinien des Kondensators geschichteten Dielektrikums (Abb. 341). Wenn die Grenzfläche um dn verschoben wird, ändert sich die Energie des in der Abbildung schraffierten Volumens von $dn\, la\, \frac{1}{2}\, \varepsilon_2 E_2^2$ auf $dn\, la\, \frac{1}{2}\, \varepsilon_1 E_1^2$, wobei a die Breite der Kondensatorplatte vertikal zur Zeichenebene und $E_1 = E_2$ sind.

Die Energiegleichung $dW = -Fdl + UdQ$ schreibt sich jetzt

$$ladn\, \frac{1}{2}\, \varepsilon_1 E^2 - ladn\, \frac{1}{2}\, \varepsilon_2 E^2 = -fladn + El(\sigma_1 - \sigma_2)\, adn.$$

Hier haben wir bei der Berechnung des Ausdrucks UdQ die Tatsache berücksichtigt, daß sich die Flächenladung auf der Fläche adn von σ_2 auf σ_1 geändert hat. Wegen $\sigma_1 = \varepsilon_1 E_1$, $\sigma_2 = \varepsilon_2 E_2$ erhalten wir die Endformel

$$f = \frac{1}{2}\, E_1^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

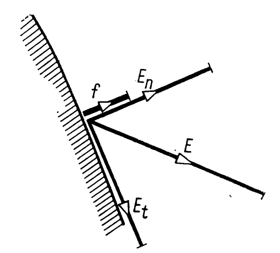


Abb. 342. Kraftwirkung auf eine beliebig verlaufende Grenzfläche

Auch diese Kraft steht senkrecht auf der Trennfläche und zeigt vom Medium mit der größeren Dielektrizitätskonstanten in das Medium mit der kleineren.

Wenn jetzt im Sinne der Abb. 342 die Feldstärke mit der Grenzfläche des Dielektrikums einen beliebigen Winkel einschließt, wird das Feld in eine normale und eine Tangentialkomponente zerlegt. Jede Komponente übt nur eine auf die Oberfläche senkrechte Kraft aus, so daß schließlich die spezifische, d. h. die mechanische, Normalspannung

$$f = \frac{1}{2}\, \varepsilon_2 E_{n2}^2 - \frac{1}{2}\, \varepsilon_1 E_{n1}^2 + \frac{1}{2}\, \varepsilon_1 E_{t1}^2 - \frac{1}{2}\, \varepsilon_2 E_{t1}^2$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\left[E_{t1}^2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\, E_{n1}^2\right]$$

ist.

Es hat sich gezeigt, daß im allgemeinen Fall die im elektrischen Feld wirkende Kraft aus drei Teilen besteht. Auf die wahre Ladung Q wirkt eine Kraft, die proportional der Ladung und Feldstärke ist; auf die scheinbare Ladung wirkt eine Kraft, welche an Inhomogenitätsstellen von ε auftritt und proportional der Änderung von ε ist; infolge der Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von der Dichte tritt eine Kraft auf, welche von der räumlichen Änderung des Produktes

$$E^2\delta\frac{\partial\varepsilon}{\partial\delta}$$

abhängt. Die so erhaltenen Zusammenhänge sind, wie leicht nachweisbar ist, die Spezialfälle des allgemeinen Ausdrucks für die räumliche Kraftdichte

$$\mathfrak{f} = \varrho\mathfrak{E} - \frac{1}{2}E^2 \operatorname{grad}\varepsilon + \frac{1}{2}\operatorname{grad}\left(E^2\delta\frac{d\varepsilon}{d\delta}\right).$$

Beispiele und Ergänzungen

Die Elektroden einer beliebigen Anordnung üben aufeinander Kräfte aus, falls sie mit Ladungen versehen sind. Die Berechnung dieser Kräfte ist im allgemeinen eine sehr schwierige Aufgabe, doch kann sie bei Kenntnis des Kraftfeldes gelöst werden. Eine mögliche Abschätzung bezüglich Richtung und Größe kann man aus dem Kraftlinienbild erhalten: FARADAY hat gerade die Kraftlinien als Vermittler der Kraftwirkungen betrachtet. Mit Hilfe der Kraftlinien wirkt die eine Elektrode auf eine weiter entfernt gelegene in der Weise, daß die Kraftlinien sich der Länge nach zu verkürzen und der Breite nach zu dehnen trachten. Man kann sich demnach entlang der Kraftlinien

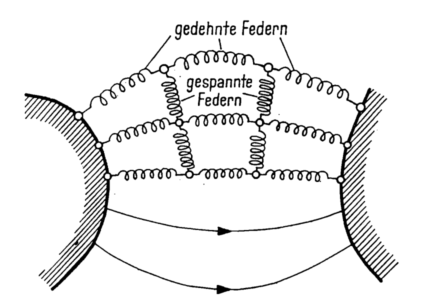


Abb. 343. Federmodell der Kraftlinien

gespannte Federn und zu diesen senkrecht zusammengedrückte Federn vorstellen (Abb. 343). FARADAY hat mit diesen Federn oder Gummibändern den Spannungszustand des „Äthers“ versinnbildlichen wollen. Es kann daraus

sofort abgelesen werden, welche Kraft z. B. auf eine in ein homogenes Feld gesetzte Kugel wirkt.

Zwar ist die Auffassung vom Spannungszustand eines „Äthers" wissenschaftlich nicht mehr aufrechtzuerhalten, doch greift man noch gern auf die Vorstellung von FARADAY zurück, weil sie als Modell unserem Vorstellungsvermögen entgegenkommt und man mit deren Hilfe zu wichtigen prinzipiellen Erkenntnissen gelangen kann. In der Folge soll der Begriff der Kraftwirkung nun quantitativ durch Einführen des elektromagnetischen Spannungstensors bestimmt werden, wodurch dann auch der Begriff des elektromagnetischen Impulses eingeführt und definiert werden kann.

Letztlich wird hierdurch der Weg zur relativistischen Elektrodynamik geebnet.

Nach dem allgemeinen Verfahren der Festigkeitslehre in der Mechanik wird aus dem elektromagnetischen Feld sinnbildlich ein Prisma ausgeschnitten, dessen eine Kante den Kraftlinien parallel verläuft. Wenn sich dieses Volumen im Gleichgewicht befinden soll, müssen äußere Kräfte, gemäß Abb. 344,

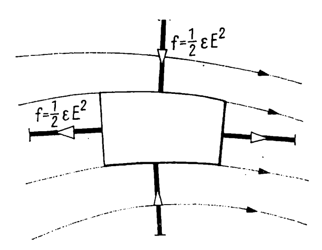


Abb. 344. Gleichgewichtszustand

angewendet werden, und zwar den Kraftlinien parallele Zugkräfte und darauf vertikale Druckkräfte. Die Größe der Zugkraft pro Flächeneinheit muß dann $\varepsilon\frac{\mathfrak{E}^2}{2}$ sein, die der Druckkraft ebenso $\varepsilon\frac{\mathfrak{E}^2}{2}$, wie es bereits bekannt ist und aus der Energiegleichung direkt folgt. Der Spannungszustand des Feldes ist somit in jedem Punkt bekannt: In Richtung des Feldes besteht eine reine Zugkraft, darauf vertikal überall eine reine Druckkraft. Die Hauptrichtungen des Spannungstensors sind also einerseits die Richtung der Kraftlinien, andererseits in der darauf vertikalen Ebene zwei beliebige, aufeinander senkrechte Richtungen. Die zu den Hauptrichtungen gehörenden Eigenwerte sind

$$\varepsilon\frac{E^2}{2}, \quad -\varepsilon\frac{E^2}{2}, \quad -\varepsilon\frac{E^2}{2}.$$

(Die beiden negativen Vorzeichen deuten darauf hin, daß als positive Richtung die aus dem Gebiet nach außen zeigenden Normalen gewählt wurden, so daß Druckkräfte stets negativ sind.)

Der Spannungstensor lautet im Hauptachsensystem demnach

$$\mathfrak{T} = \begin{bmatrix} \varepsilon \frac{E^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon \frac{E^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \frac{E^2}{2} \end{bmatrix}.$$

In einem anderen, beliebig orientierten Koordinatensystem transformieren sich, den Transformationskomponenten

$$a_{ik} = \mathfrak{n}_i \mathfrak{n}_k'$$

gemäß, auch die Komponenten des Tensors nach der Beziehung

$$T_{ik}' = \sum_{l=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} a_{il} a_{km} T_{lm}.$$

Die einzelnen transformierten Tensorkomponenten ergeben sich einfach, da nur die Komponenten T_{11}, T_{22}, T_{33} von Null verschieden sind. So ist z. B.

$$\begin{aligned} T_{11}' &= a_{11} a_{11} T_{11} + a_{12} a_{12} T_{22} + a_{13} a_{13} T_{33} \\ &= a_{11}^2 \varepsilon \frac{E^2}{2} - a_{12}^2 \varepsilon \frac{E^2}{2} - a_{13}^2 \varepsilon \frac{E^2}{2} \\ &= a_{11}^2 \varepsilon E^2 - \varepsilon \frac{E^2}{2} (a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) = \varepsilon (a_{11} E)^2 - \varepsilon \frac{E^2}{2}. \end{aligned}$$

Der Koeffizient a_{11} bedeutet den Kosinus des Winkels, den die erste Hauptrichtung (die $\mathfrak{E}$-Richtung) mit der x-Achse einschließt. Daher ist

$$a_{11} E = E_x,$$

und die transformierte Komponente T_{11}' kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$T_{11}' = \varepsilon E_x^2 - \varepsilon \frac{E^2}{2}.$$

In ähnlicher Weise kann jede transformierte Tensorkomponente angegeben werden. Für den Spannungstensor ergibt sich in einem beliebigen Koordinaten-

system der Ausdruck:

$$\mathfrak{T} = \begin{bmatrix} \varepsilon E_x^2 - \frac{\varepsilon}{2} E^2 & \varepsilon E_x E_y & \varepsilon E_x E_z \\ \varepsilon E_y E_x & \varepsilon E_y^2 - \frac{\varepsilon}{2} E^2 & \varepsilon E_y E_z \\ \varepsilon E_z E_x & \varepsilon E_z E_y & \varepsilon E_z^2 - \frac{\varepsilon}{2} E^2 \end{bmatrix}.$$

Auf ein beliebiges Flächenelement dA wirkt im Feld die Kraft $d\mathfrak{F} = \mathfrak{T}\, d\mathfrak{A}$. Wenn man ein geschlossenes Gebiet ausschneidet, so wirkt auf dessen Oberfläche das äußere Feld mit der Kraft

$$\oint_A \mathfrak{T}\, d\mathfrak{A}.$$

Diese Kraft ist selbstverständlich gleich dem Integral der auf die einzelnen Volumenelemente wirkenden Kräfte:

$$\int_V \mathfrak{f}\, dV = \oint_A \mathfrak{T}\, d\mathfrak{A}. \qquad (6.6.1)$$

Durch Anwenden des GAUSSschen Satzes erhält man daraus

$$\mathfrak{f} = \operatorname{div} \mathfrak{T}$$

Dies bedeutet für f_x den Zusammenhang

$$f_x = \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial z},$$

in den der Wert T_{ik} eingesetzt wird, wodurch man das Endergebnis

$$f_x = \varrho E_x - \frac{1}{2} (E^2 \operatorname{grad} \varepsilon)_x$$

gewinnt, wenn die Gleichung $\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho$ berücksichtigt wird.

Die Gleichung (6.6.1) kann so gedeutet werden – und dies rechtfertigt gerade die Einführung des Spannungstensors –, daß die Resultierende der Kräfte, die auf ein Volumen wirken, durch die Resultierende der Oberflächenkräfte berechnet werden kann, die auf die das Volumen begrenzende Fläche wirken. In einem materiefreien Raumgebiet ist die Resultierende der Ober-

flächenkräfte gleich Null, obgleich der Wert jeder einzelnen Tensorkomponente von Null verschieden sein kann.

Die Einführung des Spannungstensors ergibt sich übrigens logisch aus der Nahwirkungstheorie: Das Medium zwischen den Ladungen spielt die Rolle des Übermittlers der Kräfte. Die Kraftwirkung kann daher in einen geschlossenen Raumteil nur durch Vermittlung der Oberflächenelemente gelangen.

6.7. Die Energie im elektrostatischen Feld im allgemeinen Fall

Wir denken uns n Leiter von beliebiger Form in der Luft beliebig angeordnet (Abb. 345). Ihre Ladungen seien $q_1, \ldots, q_k, \ldots, q_n$, ihre Potentiale $U_1, \ldots, U_k, \ldots, U_n$. Es ist der Energieinhalt des Feldes zu berechnen. Nach

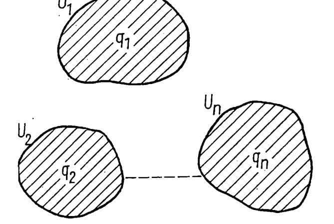


Abb. 345. Leitersystem zur Berechnung der elektrischen Energie

der bisher befolgten Methode ist zu untersuchen, wieviel Arbeit zur Erzeugung des Feldes geleistet werden mußte. Es ist natürlich gleichgültig, wie das Feld in seinen endgültigen Zustand gebracht wurde und in welcher Reihenfolge die einzelnen Leiter aufgeladen wurden; man muß immer zum gleichen Ergebnis kommen.

Am einfachsten erreicht man das Ziel, wenn die Ladung jedes einzelnen Leiters von Null bis zum Endwert stetig erhöht wird. Dies läßt sich dadurch realisieren, daß man das auf den Leiter gebrachte Ladungselement dq_k proportional zur Endladung des Leiters wählt:

$$dq_1 = d\lambda q_1; \quad dq_2 = d\lambda q_2; \quad \ldots; \quad dq_n = d\lambda q_n.$$

Nach einer gewissen Zeit werden die einzelnen Leiter mit einer Ladung

$$\lambda q_1, \ldots, \lambda q_k, \ldots, \lambda q_n$$

versehen sein, wobei λ kleiner als 1, im übrigen aber eine beliebige Zahl ist. Das Kraftlinienbild sowie die Verteilung des Potentials wird in diesem Fall dem im Endstadium existierenden Kraftlinienbild ähnlich sein, jedoch mit dem Unterschied, daß in jedem Punkt sowohl die Feldstärke als auch das Potential das λ-fache des Endwertes beträgt. Die Potentiale der einzelnen Leiter sind also $\lambda U_1, \ldots, \lambda U_k, \ldots, \lambda U_n$.

Wenn nun das folgende Ladungselement $d\lambda q_k$ auf den k-ten Leiter gebracht werden soll, muß eine Arbeit

$$\lambda U_k \, d\lambda q_k$$

geleistet werden, da der Leiter das Potential λU_k besitzt. Falls jeder beliebige Leiter mit einem entsprechenden Ladungselement aufgeladen wird, kann die geleistete Arbeit ähnlich geschrieben werden. Die gesamte elementare Arbeit, d. h. die Vergrößerung der Energie des Feldes, wird durch die Beziehung

$$dW = \sum_{k=1}^{n} \lambda U_k \, d\lambda \, q_k$$

geliefert.

Die gesamte Feldenergie, also die gesamte aufgewendete Arbeit, erhält man im Endzustand, wenn die Leiter bis zum Wert $\lambda = 1$ aufgeladen werden, zu:

$$W = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} U_k q_k \lambda \, d\lambda = \sum_{q=1}^{n} U_k q_k \int_0^1 \lambda \, d\lambda .$$

Da

$$\int_0^1 \lambda \, d\lambda = \left[\frac{\lambda^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

ist, ergibt sich

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} U_k q_k . \tag{6.7.1}$$

Sind im Feld nur zwei Leiter mit gleichgroßer, doch entgegengesetzter Ladung vorhanden, so vereinfacht sich diese Gleichung auf die bekannte Form

$$W = \frac{1}{2} U_1 q - \frac{1}{2} U_2 q = \frac{1}{2} (U_1 - U_2) \, q .$$

Genauso wie diese einfache Formel auch in der Form $\frac{1}{2} C U^2$ geschrieben werden kann, kann auch die Gleichung (6.7.1) unter Verwendung der Beziehung

$$q_k = c_{k1} U_1 + \ldots + c_{kn} U_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} U_i$$

in der Form

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ik} U_i U_k$$

geschrieben werden.

Bei einer räumlichen Ladungsdichte erhält man nach (6.7.1)

$$W = \frac{1}{2}\int_V U\varrho dV,$$

bei einer Flächenladungsdichte

$$W = \frac{1}{2}\int_A U\sigma dA.$$

6.8. Berechnung der Kraft aus der Energie im allgemeinen Fall

Die Gestalt des Feldes und die Energieverhältnisse der soeben behandelten n Leiter hängen von den Ladungen, von der Form der Leiter und von der gegenseitigen Lage ab. Sind die Form und Ladung der Leiter gegeben, so ist ihre relative Lage zueinander entscheidend.

Der Freiheitsgrad gibt an, wie viele frei wählbare, voneinander unabhängige Parameter notwendig sind, um die relative Lage einer Anordnung – in diesem Fall der n Leiter – zu bestimmen. Diese die geometrische Lage eines Systems beschreibenden Parameter nennt man „allgemeine Koordinaten". Sie können die verschiedenste Bedeutung haben. Der Ort einer punktförmigen Elektrode kann in kartesischen Koordinaten x, y, z oder in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ angegeben werden. Der Freiheitsgrad ist daher 3. Ein um eine bestimmte Achse rotierender Leiter hat den Freiheitsgrad 1, denn es genügt die Angabe des Winkels φ.

Der Freiheitsgrad unseres Elektrodensystems sei f. Dann ist die Anordnung durch die Angabe der Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_f$ eindeutig gegeben.

Die Energie des Feldes hängt außer von den Potentialen der Leiter von der Kapazität der Anordnung ab und ist damit also eine Funktion der allgemeinen Koordinaten ξ_i:

$$W = W(U_1, \ldots, U_n, \quad \xi_1, \ldots, \xi_f). \tag{6.8.1}$$

Es seien nunmehr alle Leiter fixiert mit Ausnahme des Leiters i, und auch bei diesem sei nur eine einzige Koordinate ξ veränderlich, z. B. so, daß er sich nur in einer Richtung drehen oder sich nur parallel zu einer Koordinatenachse verschieben kann. Bei dieser Bewegung des Leiters auf Grund der im Feld wirkenden Kraft ändere sich ξ um $d\xi$. Dabei ändert sich die Energie des Feldes um

$$dW_f = \frac{\partial W}{\partial \xi} d\xi.$$

Ist f die Größe der Kraft, die längs der Strecke $d\xi$ wirkt, so beträgt die Arbeitsleistung dieser Kraft

$$dW_k = f d\xi.$$

Sofern im System keine weitere Energieänderung auftritt und da die Summe der Energieänderungen nach dem Erhaltungssatz Null sein muß, gilt

$$dW_f + dW_k = 0.$$

Dies bedeutet, daß das Feld gegen eine äußere Kraft eine Arbeit zu Lasten der Feldenergie geleistet hat. Gleichzeitig bedeutet es aber auch, daß die Ladung sämtlicher Leiter konstant ist.

Wenn die beiden Energieänderungen hier eingesetzt werden:

$$f\,d\xi + \frac{\partial W}{\partial \xi}\,d\xi = 0,$$

ergibt sich für die Kraft

$$f = -\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)_{q=\mathrm{const}}. \tag{6.8.2}$$

Ebenso wie die Koordinaten ξ „allgemeine Koordinaten" sind, bedeutet f auch keine Kraft im gewöhnlichen Sinne. Sie ist eine Größe, welche, mit dem Differential einer allgemeinen Koordinate multipliziert, eine Arbeit ergibt. Nur wenn die allgemeine Koordinate den Charakter einer Länge hat, bedeutet f eine in Newton zu messende Kraft; ist jedoch ξ ein Winkel, so bedeutet f ein Moment, ist ξ ein Volumen, so wird f der Druck.

Im allgemeinen Fall sollen sämtliche Leiter mit verschiedenen Stromquellen verbunden werden, so daß die Stromquellen auf die einzelnen Leiter verschiedene Ladungen dq liefern. Nach dem Energieerhaltungssatz müssen jetzt die Änderung der Feldenergie und die nach außen geleistete Arbeit gleich der Arbeit der Stromquellen $\sum U_k dq_k$ sein:

$$\sum_{k=1}^{n} U_k\,dq_k = dW_f + f\,d\xi. \tag{6.8.3}$$

Besondere Aufmerksamkeit verdient der Fall, daß das Potential der einzelnen Leiter konstant gehalten wird. Hier kann die Änderung der Feldenergie sofort angegeben werden:

$$dW_f = d\left(\frac{1}{2}\sum U_k q_k\right) = \frac{1}{2}\sum U_k dq_k. \tag{6.8.4}$$

Die Feldenergie ist gleich der Hälfte der von der Stromquelle gelieferten Energie. Setzt man diesen Wert in die Gleichung (6.8.3) ein, erhält man für die Kraft

$$f = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)_{U_k = \text{const}} . \tag{6.8.5}$$

Wir haben bereits gezeigt, daß die Energie $\frac{1}{2}QU$ auch in der Form $\frac{1}{2}EDV$ geschrieben werden kann. Man kann leicht verstehen, daß der Ausdruck der Energie $\frac{1}{2}\sum U_k q_k$ in der Form

$$\sum \frac{1}{2} ED\, dV$$

geschrieben werden kann, und zwar um so genauer, je kleiner die Volumenelemente dV gewählt werden. Nach dem Grenzübergang erhält man

$$\frac{1}{2}\sum_k U_k q_k = \frac{1}{2}\int_V \mathfrak{E}\mathfrak{D}\, dV.$$

In Abb. 346 ist das Feld eines allgemeinen Kondensators dargestellt. Die Ladungen seien $+Q$ und $-q$, wobei $Q > q$ sei. Die Potentiale der Leiter seien U und u. Durch jeden Querschnitt einer beliebigen, durch Verschiebungslinien begrenzten Kraftflußröhre treten gleich viele D-Linien hindurch. Es soll untersucht werden, wieviel Energie die Kraftflußröhre enthält. Die Energie des Feldes ist

$$W = \frac{1}{2}\, UQ - \frac{1}{2}\, uq.$$

Hierfür kann mit den Bezeichnungen der Abb. 346 geschrieben werden

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\,(UdQ_1 + UdQ_2 + \ldots + UdQ_1' + UdQ_2' + \ldots) \\ &\quad - \frac{1}{2}\, udQ_1' - \frac{1}{2}\, udQ_2' - \ldots \\ &= \frac{1}{2}\, UdQ_1 + \frac{1}{2}\, UdQ_2 + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{2}\,(U - u)\, dQ_1' + \frac{1}{2}\,(U - u)\, dQ_2 + \ldots \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}UdQ_1$ wird unter Verwendung des Linienintegrals der Feldstärke

$$\frac{1}{2}\, UdQ_1 = \frac{1}{2}\, dQ_1 \int_\infty^P E\, dl,$$

und mit

$$dQ_1 = DdA$$

wird

$$\frac{1}{2}\,UdQ_1 = \frac{1}{2}\int_\infty^P E\,dl\,D\,dA = \frac{1}{2}\int_\infty^P ED\,dV.$$

Das Integral ergibt also das über das Volumen der Kraftflußröhre berechnete Integral von ED. Die übrigen Glieder des Energieausdrucks zeigen der Reihe nach das Integral der übrigen Kraftflußröhren (so wurde das ganze dem Ausdruck $\frac{1}{2}(U - u)\,dQ'_1$ entsprechende Volumen schraffiert).

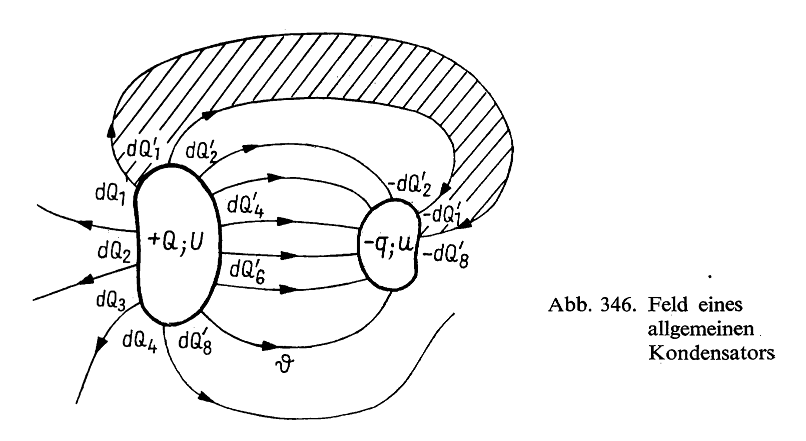


Abb. 346. Feld eines allgemeinen Kondensators

6.9. Die Energie des magnetischen Feldes

Die Energie des magnetischen Feldes wird von der Arbeit bestimmt, die die Stromquelle leistet, wenn sie das zu dem Strom gehörende magnetische Feld aufbaut.

Um die Verhältnisse im einzelnen näher zu untersuchen, soll die Anordnung der Abb. 347 betrachtet werden. Im Zeitpunkt Null wird die Gleichspannung

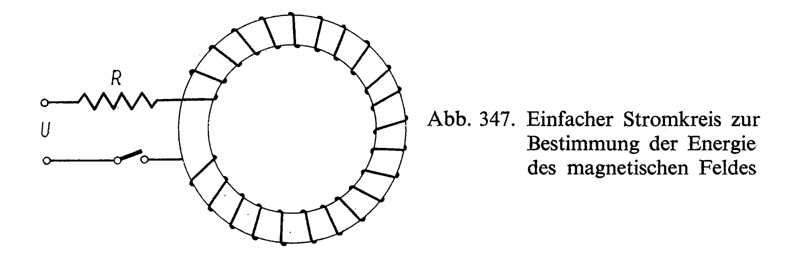


Abb. 347. Einfacher Stromkreis zur Bestimmung der Energie des magnetischen Feldes

$U = U_0$ an den Kreis geschaltet; nach einer gewissen Zeit hat die Stromstärke den Wert

$$I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

Solange die Stromstärke diesem Endwert zustrebt, d. h., solange sie sich ändert, ändert sich auch der Kraftfluß durch die Spule, und entlang der Spule tritt eine Spannungsdifferenz auf, die der zeitlichen Änderung der Stromstärke proportional ist. Den zeitlichen Verlauf der Stromstärke zeigt Abb. 348. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung

$$U = IR + L\frac{dI}{dt},$$

die die Spannungsbilanz dieser Anordnung darstellt, mit $I\,dt$ und integriert vom Zeitpunkt des Einschaltens $t = 0$ bis zu einem beliebigen Zeitpunkt t, so erhält man

$$\int_0^t UI\,dt = \int_0^t I^2 R\,dt + \int_0^t L\frac{I}{dt} I\,dt.$$

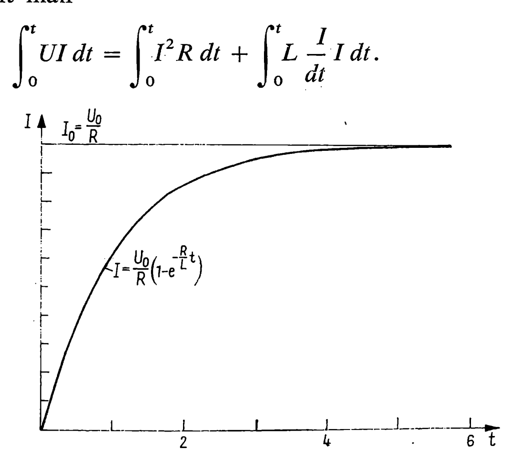


Abb. 348. Zeitlicher Verlauf der Stromstärke beim Einschalten einer Gleichspannung

Auf der linken Seite der Gleichung steht die Arbeit, welche die Batterie oder die Stromquelle der Anordnung geliefert hat. Das erste Glied der rechten Seite ergibt die Arbeit, die im Widerstand in Wärme umgewandelt wurde. Das zweite Glied kann nur die in der Magnetspule in Form von magnetischer Energie aufgespeicherte Arbeit bedeuten. Der Energiegehalt des magnetischen Feldes ist demnach

$$W_m = \int_0^t L\frac{dI}{dt} I\,dt = \int_0^I LI\,dI = \frac{1}{2}LI^2.$$

Die magnetische Energie einer Spule ist demnach das halbe Produkt aus dem Quadrat des Stromes in der Spule und deren Induktivität. Dieses Ergebnis ist dem Zusammenhang $\frac{1}{2}CU^2$ formal ähnlich, der die Energie des Kondensators angibt. Die Analogie geht sogar noch weiter. Wie nachstehend bewiesen wird, kann der Energiedichte im elektrischen Feld

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

entsprechend auch die Energiedichte im magnetischen Feld in der analogen Form

$$w_m = \frac{1}{2}\mu H^2$$

geschrieben werden.

Die vorherige Ableitung ist insofern nicht allgemein, als die Existenz des konstanten Induktionskoeffizienten, also die Proportionalität des magnetischen Kraftflusses zur Stromstärke, vorausgesetzt wurde. Wenn das Innere der Spule mit einem ferromagnetischen Stoff ausgefüllt ist, muß die allgemeine Beziehung

$$U = IR + N\frac{d\Phi}{dt}$$

benutzt werden. Dabei bedeutet Φ den Kraftfluß in der Spule, welcher durch die Stromstärke I erzeugt wird. Multipliziert man die Gleichung mit $I\,dt$ und integriert sie zwischen den Grenzen 0 und t, so erhält man

$$\int_0^t UI\,dt = \int_0^t I^2R\,dt + \int_0^t NI\frac{d\Phi}{dt}\,dt.$$

Das zweite Glied der rechten Seite bedeutet auch hier die magnetische Energie, die im Feld zwischen dem Zeitpunkt des Einschaltens und dem beliebigen Zeitpunkt t auftritt. Da die Spule kreisringförmig ist, gilt

$$I = \frac{lH}{N}; \quad \Phi = AB.$$

Die magnetische Energie ist damit

$$W_m = \int_0^t N\frac{lH}{N}A\frac{dB}{dt}\,dt = \int_0^B lAH\,dB.$$

Falls die Permeabilität konstant ist, gilt

$$W_m = \int_0^H lA\mu H\, dH = \frac{1}{2}\, \mu H^2 lA = \frac{1}{2}\, \mu H^2 V$$

oder

$$w_m = \frac{1}{2}\, \mu H^2.$$

Aus der Abb. 349 geht hervor, daß der allgemeingültige Zusammenhang

$$w_m = \int_0^B H\, dB$$

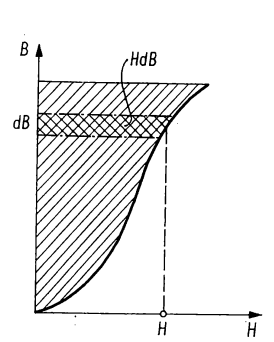


Abb. 349. Geometrische Bedeutung des Ausdrucks der magnetischen Energie

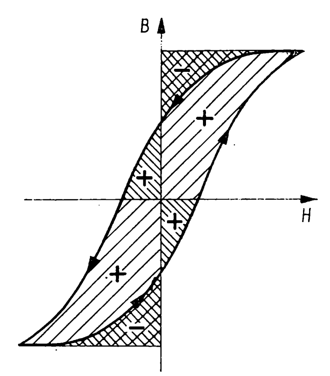


Abb. 350. Hysteresisverlust

die Fläche zwischen der Magnetisierungskurve und der Induktionsachse liefert. Diese Fläche, d. h. die bei der Auf- oder Entmagnetisierung geleistete Arbeit, kann positiv oder negativ sein, je nachdem, ob die Richtungen von $\mathfrak{H}$ und $d\mathfrak{B}$ gleich oder entgegengesetzt sind. Bedeutet der positive Wert die aufzuwendende Energie, so ergibt der negative Wert die zurückgewonnene Energie. In der Abb. 350 ist die während einer ganzen Magnetisierungsperiode aufgewendete bzw. zurückgewonnene Arbeit dargestellt. Die Differenz der bei der Magnetisierung aufgewendeten bzw. zurückgewonnenen Energie verwandelt sich im Eisen in Wärme. Dies ergibt den bei der Magnetisierung entstehenden Verlust, welcher nach der Abbildung gleich der Fläche der Hysteresiskurve ist und deshalb auch Hysteresisverlust genannt wird.

Besitzt ein ferromagnetischer Stoff eine Hysteresiskurve, so finden während der Magnetisierung und Entmagnetisierung irreversible Zustandsänderungen statt; so gibt das Integral $\int_0^B H\, dB$ nur die in dem Magneten aufgewendete Energie an; wieviel davon als Feldenergie auftritt und welcher Teil sich in Wärme umgewandelt hat, geht daraus nicht hervor.

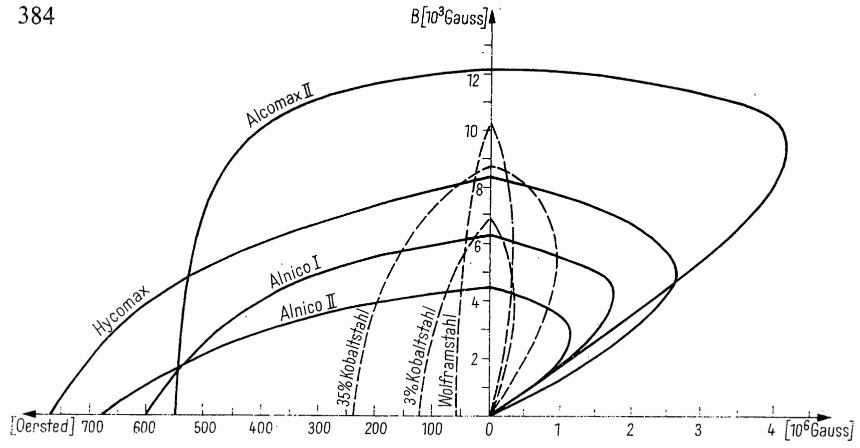


Abb. 351a. Entmagnetisierungs- und Energiedichtekurven permanentmagnetischer Stoffe (nach Angaben der The Mond Nickel Co.)

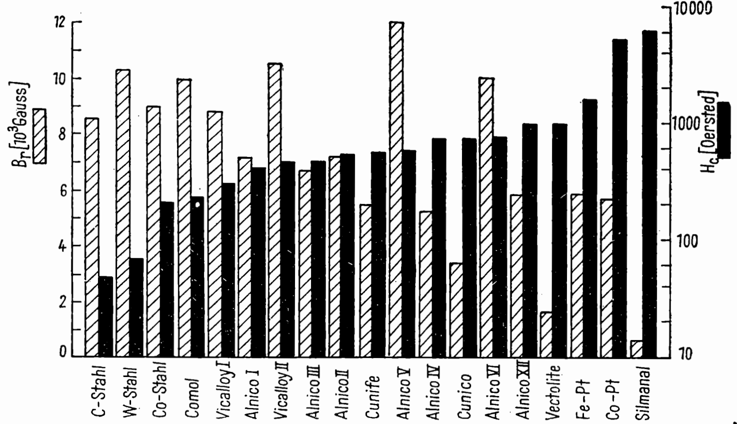


Abb. 351b. Aus den Werten der Remanenz B_r und der Koerzitivkraft H_c kann man auf die maximale Energiedichte schließen (nach A. H. GEISLER). Die Zusammensetzung der einzelnen Legierungen (in Prozent):

C-Stahl – 1 C, 0,5 Mn, Rest Fe.
W-Stahl – 5 W, 1 C, Rest Fe.
Co-Stahl – 36 Co, 3,5 Cr, 3 W, 1 C, Rest Fe.
Comol – 12 Co, 17 Mo, Rest Fe.
Cunico – 50 Cu, 21 Ni, 29 Co.
Cunife – 60 Cu, 20 Ni, 20 Fe.
Alnico I – 12 Al, 20 Ni, 5 Co, Rest Fe.
Alnico II – 10 Al, 17 Ni, 12,5 Co, 6 Cu, Rest Fe.
Alnico III – 12 Al, 25 Ni, Rest Fe.
Alnico IV – 12 Al, 28 Ni, 5 Co, Rest Fe.
Alnico V – 8 Al, 14 Ni, 24 Co, 3 Cu, Rest Fe.
Alnico VI – 8 Al, 15 Ni, 24 Co, 3 Cu, 1,3 Ti, Rest Fe.
Alnico XII – 6 Al, 18 Ni, 35 Co, 8 Ti, Rest Fe.
Silmanal – 86,8 Ag, 8,8 Mn, 4,4 Al.
Vectolite – 30 Fe_2O_3, 44 Fe_3O_4, 26 Co_2O_3.
Vicalloy I – 52 Co, 38,5 Fe, 9,5 V.
Vicalloy II – 52 Co, 35 Fe, 13 V.
Co-Pt – 22 Co, 78 Pt.
Fe-Pt – 23 Fe, 77 Pt.

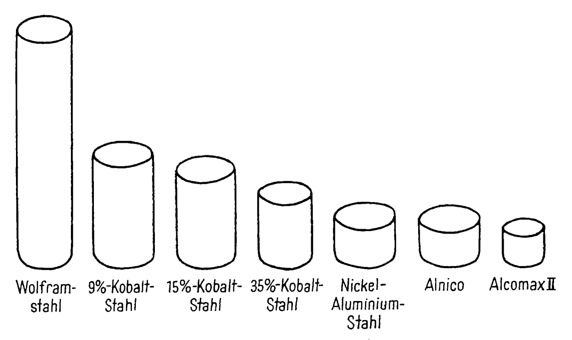


Abb. 352. Größenvergleich von Dauermagneten gleichen Energieinhalts aus verschiedenen Werkstoffen (nach Angaben der The Mond Nickel Co.)

6.10. Energieinhalt eines Dauermagneten

Der Luftspalt eines Dauermagneten habe die Breite d und der Magnet eine Ringlänge $l_e + d$. Die Energie im Luftspalt ist

$$W_l = \frac{H_l B_l}{2} V_l,$$

wobei V_l das Volumen des Luftspalts bedeutet. Aus dem Erregungsgesetz erhält man

$$H_l d + H_e l_e = 0$$

oder

$$H_l = -\frac{H_e l_e}{d}.$$

Andererseits ist $B_e = B_l$; die im Luftspalt existierende magnetische Energie kann also geschrieben werden

$$W_l = \frac{H_e l_e}{2d} B_e V_l = \frac{H_e l_e}{2d} B_e A d = \frac{H_e B_e}{2} V_e.$$

Die Energie ist also dem Volumen des Eisens proportional.

6.11. Die Berechnung der Kraft mit Hilfe des Ausdrucks der magnetischen Energie

Bei konstantem Kraftfluß (konstanter Induktion) soll festgestellt werden, mit welcher Kraft sich die beiden freien Flächen eines magnetischen Kreises anziehen (Abb. 353). Dies kann prinzipiell aus der Wirkung, die die Ströme

aufeinander ausüben, berechnet werden, doch muß man auch die Wirkung der molekularen Ströme berücksichtigen. Schneller kommt man jedoch zum Ziel, wenn man, wie bei der Berechnung der Kraft im elektrischen Feld, von der Gleichung der Energie im homogenen Feld ausgeht:

$$W_m = \frac{1}{2} HBV. \tag{6.11.1}$$

Infolge der Anziehungskraft möge sich eine Fläche vertikal um ein Stück dl verschieben. Die Energie des magnetischen Feldes wird dabei vermindert, und das Feld kann gegen eine äußere Kraft Arbeit leisten.

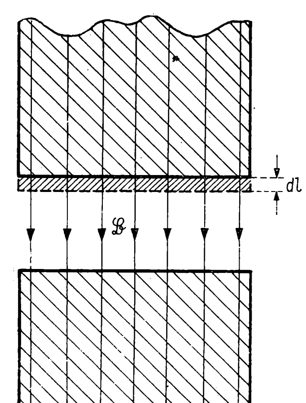


Abb. 353. Kraftwirkung zweier freier Flächen eines magnetischen Kreises aufeinander

Der Energieinhalt des eng schraffierten Feldteils war vor der Verrückung

$$\frac{1}{2} \mu_0 H_l^2 \, dl A,$$

jetzt ist dort die Energie

$$\frac{1}{2} \mu_e H_e^2 \, dl A;$$

die Änderung der Energie beträgt somit

$$dW_f = \frac{1}{2} \, dl \, A \, [\mu_e H_e^2 - \mu_0 H_l^2].$$

Im nächsten Abschnitt wird sich herausstellen, daß bei konstantem Fluß

$$f = -\frac{\partial W_f}{\partial l}$$

und damit

$$f = \frac{1}{2}\mu_0 H_l^2 - \frac{1}{2}\mu_e H_e^2 \tag{6.11.2}$$

ist. Da B konstant ist, gilt

$$H_e = \frac{B}{\mu_e} \quad \text{und} \quad H_l = \frac{B}{\mu_0},$$

und die Kraft wird

$$f = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r}\right). \tag{6.11.3}$$

Wenn speziell $\mu_r \gg 1$ ist, wird

$$\frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \approx 1$$

und damit

$$f = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}. \tag{6.11.4}$$

Aus (6.11.4) kann man ablesen, daß mit Eisenkernspulen sehr große spezifische Kräfte erzielt werden können. Da eine Induktion

$$B = 1\,\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$$

verhältnismäßig leicht erreicht werden kann, ist damit eine spezifische Anziehungskraft (Normalspannung) von

$$f = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi\cdot 10^{-7}}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 4\cdot 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \approx 4\cdot 10^4\,\frac{\text{kp}}{\text{m}^2}$$

leicht herzustellen.

Ganz ähnlich kann der Ausdruck für die Kraft je Flächeneinheit senkrecht zu den Kraftlinien hergeleitet werden, wenn die Kraftlinien zur Grenzfläche zwischen Eisen und Luft parallel laufen:

$$f = \frac{1}{2}\mu_e H_e^2 - \frac{1}{2}\mu_0 H_l^2.$$

Da jetzt

$$H_l = H_e = H$$

ist, wird

$$f = \frac{1}{2} H_l^2(\mu_e - \mu_0).$$

Im allgemeinen Fall, wenn die Kraftlinien einen beliebigen Winkel mit der Fläche einschließen, ist die vertikal zur Fläche wirkende Normalspannung

$$f = \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)\left(H_{1t}^2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n}^2\right).$$

Auf der Trennfläche zwischen Eisen und Luft wird die spezifische Kraft durch die Induktion ausgedrückt:

$$f = \frac{\mu_r - 1}{2\mu_r \mu_0}(B_n^2 + \mu_r B_t^2).$$

Auch hier gilt, wie im Fall des elektrischen Feldes, daß all diese Zusammenhänge Spezialfälle der allgemeinen Gleichung für die räumliche Kraftdichte

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} - \frac{1}{2} H^2 \operatorname{grad} \mu + \frac{1}{2} \operatorname{grad}\left(H^2 \delta \frac{d\mu}{d\delta}\right)$$

sind.

Beispiele und Ergänzungen

1. Die magnetischen Kräfte, die an den Orten sich ändernder Permeabilität auftreten, werden bei den billigen und deshalb in der Praxis sehr verbreiteten Weicheisen-Strommeßinstrumenten ausgenutzt. Der zu messende Strom fließt durch eine ruhende Spule und erzeugt ein magnetisches Feld, in dem ein Stück Weicheisen drehbar gelagert ist. Das darauf wirkende Moment zeigt die Größe der Stromstärke an. Diese Instrumente können bei Gleich- und Wechselstrom verwendet werden, weil die Kraft dem Quadrat der Feldstärke proportional ist. Abb. 354 zeigt die geläufigsten Ausführungen.

2. Ähnlich wie im elektrostatischen Fall wird der mechanische Spannungszustand des magnetischen Feldes durch einen Tensor charakterisiert:

$$\mathfrak{T}_m = \begin{vmatrix} \mu H_x^2 - \mu \frac{H^2}{2} & \mu H_x H_y & \mu H_x H_z \\ \mu H_y H_x & \mu H_y^2 - \mu \frac{H^2}{2} & \mu H_y H_z \\ \mu H_z H_x & \mu H_z H_y & \mu H_z^2 - \mu \frac{H^2}{2} \end{vmatrix}.$$

Der *elektromagnetische* Spannungstensor ist daher

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_e + \mathfrak{T}_m.$$

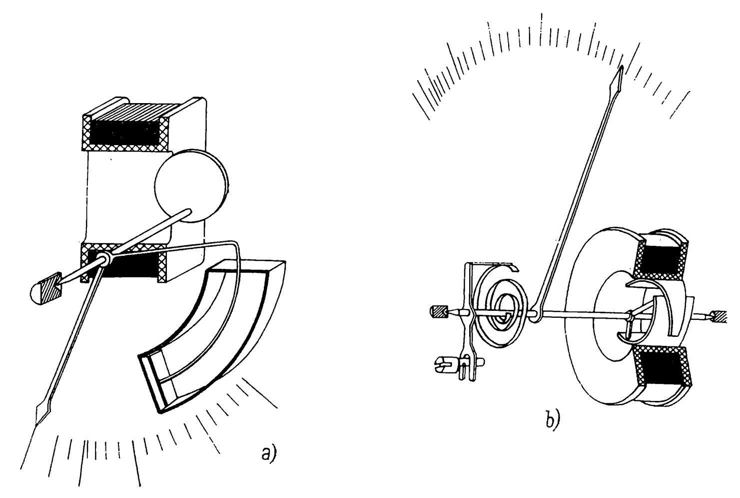


Abb. 354. Weicheiseninstrument
a) mit Flachspule, b) mit Kreisspule (nach PALM)

Der Zusammenhang zwischen der allgemeinen Kraftwirkung und dem Spannungstensor lautet

$$\operatorname{div}\mathfrak{T} = \varrho\mathfrak{E} + \mathfrak{G}\times\mathfrak{B} - \frac{1}{2}E^2\operatorname{grad}\varepsilon - \frac{1}{2}H^2\operatorname{grad}\mu = \mathfrak{f}_e + \mathfrak{f}_m$$

bzw.

$$\int_V (\mathfrak{f}_e + \mathfrak{f}_m)\,dV = \oint_A \mathfrak{T}\,d\mathfrak{A}.$$

Im materiefreien, doch mit Ladungsdichte und Stromdichte versehenen Feld ist

$$\int_V (\varrho\mathfrak{E} + \mathfrak{G}\times\mathfrak{B})\,dV = \oint_A \mathfrak{T}\,d\mathfrak{A},$$

wie wir bereits sehen konnten.

6.12. Die Energie des magnetischen Feldes im allgemeinen Fall

Im Raum seien n Stromkreise angeordnet (einfachheitshalber z. B. in Luft). In jedem Stromkreis liegt eine Stromquelle mit veränderlicher Spannung und

ein beliebiger ohmscher Widerstand (Abb. 355). Wenn in den Kreisen $1, \ldots, k, \ldots, n$ die Ströme $I_1, \ldots, I_k, \ldots, I_n$ fließen, besitzt das von ihnen aufgebaute magnetische Feld eine definierte Energie. Diese Energie soll berechnet werden, und zwar analog der Berechnung, wie sie im Fall einer einzigen Spule durchgeführt wurde. Wir untersuchen, wieviel Arbeit sämtliche Stromquellen außer zur Erwärmung der Leiter noch geleistet haben.

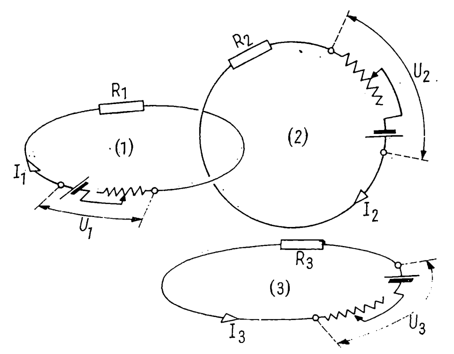


Abb. 355. Bestimmung der magnetischen Energie mehrerer Stromkreise

Die aufgeprägte Spannung eines jeden Stromkreises muß den ohmschen und den induktiven Spannungsabfall decken:

$$U_k = I_k R_k + \frac{d\Phi_k}{dt},$$

wobei Φ_k jenen Teil des Gesamtflusses bedeutet, der mit dem k-ten Strom verkettet ist. Die während der Zeit dt geleistete Arbeit der Stromquelle k erhalten wir, wenn wir die Gleichung mit $I_k\,dt$ multiplizieren:

$$U_k I_k\,dt = I_k^2 R_k\,dt + I_k\,d\Phi_k.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht die durch die Stromquelle geleistete Arbeit. Das erste Glied der rechten Seite bedeutet die im ohmschen Widerstand in Wärme umgewandelte Arbeit, das zweite Glied ist die Arbeit, die zur Erhöhung des Energieinhalts des magnetischen Feldes verwendet wurde.

Diese Arbeit unterscheidet sich immer von Null, wenn $d\Phi_k$ ungleich Null ist, Φ_k sich also aus irgendeinem Grund ändert. Die Stromquelle des Kreises k leistet also auch dann eine Arbeit (die positiv oder negativ sein kann), wenn der Strom in einem beliebigen anderen Kreis geändert wird. Es ändert sich dann auch der Wert von Φ_k; denn wenn sich in einem beliebigen Kreis der Strom ändert, induziert er in einem anderen Kreis eine Spannung, und die Stromquelle dieses Kreises muß gegen diese Spannung einen Strom aufrechterhalten.

Die Gesamtenergie des Feldes ist demnach

$$W = \sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{\Phi_k} I_k \, d\Phi_k . \tag{6.12.1}$$

Man muß also sämtliche Stromkreise von 1 bis n und sämtliche Änderungen der Kraftflüsse von Null bis zum Endwert summieren.

Die Energie hängt offensichtlich nicht davon ab, in welcher Reihenfolge die Ströme geändert werden. Sie sind lediglich so zu ändern, daß das Verhältnis der Ströme untereinander immer gleich bleibt. Zu einem beliebigen Zeitpunkt sind die Ströme gleich

$$\lambda I_1, \ldots, \lambda I_k, \ldots, \lambda I_n,$$

wobei $0 \leqq \lambda \leqq 1$ ist. Nach dem Überlagerungsprinzip sind die mit den einzelnen Strömen verbundenen Kraftflüsse

$$\lambda \Phi_1, \ldots, \lambda \Phi_k, \ldots, \lambda \Phi_n,$$

die während der Zeit dt um

$$\Phi_1 d\lambda, \ldots, \Phi_k d\lambda, \ldots, \Phi_n d\lambda$$

anwachsen.

Im Anfangsstadium des Feldes ist $\lambda = 0$, im Endstadium $\lambda = 1$.

Die Energie wird somit

$$W = \sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{1} \lambda I_k \Phi_k \, d\lambda = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} I_k \Phi_k .$$

Führt man hier

$$\Phi_k = L_{k1} I_1 + L_{k2} I_2 + \ldots + L_{kn} I_n = \sum_{i=1}^{n} L_{ki} I_i$$

ein, so ergibt sich die Formel

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} L_{ki} I_k I_i . \tag{6.12.2}$$

Für nur zwei Stromkreise wird

$$W = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + \frac{L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_2 I_1}{2}$$

oder, wenn man, wie noch bewiesen werden wird, die Gleichheit $L_{12} = L_{21} = M$ annimmt,

$$W = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + M I_1 I_2 .$$

Wir untersuchen jetzt analog zu dem entsprechenden Verfahren in der Elektrostatik in einem ganz allgemeinen Fall, wie die Kraft aus der Formel für die Energie hergeleitet werden kann. Die Lage der n Stromkreise sei eindeutig durch die allgemeinen Koordinaten ξ bestimmt, und die Kraft f sei der Änderung $d\xi$ derart zugeordnet, daß das Produkt $f d\xi$ die abgegebene Arbeit des Systems ist.

Die Energiegleichung lautet jetzt wie folgt: Die Arbeit der Stromquellen deckt die äußere Arbeit bei der Änderung $d\xi$ eines einzigen Parameters ξ während der Zeit dt, ferner die in den Leitungen entstandene Wärme und die Änderung der Feldenergie:

$$\sum_{k=1}^{n} U_k I_k \, dt = \sum_{k=1}^{n} I_k^2 R_k \, dt + d_\xi W + f \, d\xi. \tag{6.12.3}$$

In einem beliebigen Kreis gilt

$$U_k = I_k R_k + \frac{d\Phi_k}{dt},$$

wo Φ_k den gesamten, mit dem Kreis k gekoppelten Kraftfluß bedeutet. Diese Gleichung kann mit $I_k \, dt$ multipliziert werden und ergibt summiert

$$\sum_{k=1}^{n} U_k I_k \, dt = \sum_{k=1}^{n} I_k^2 R_k \, dt + \sum_{k=1}^{n} I_k \, d\Phi_k.$$

In die Energiebilanzgleichung (6.12.3) eingesetzt, ergibt dies

$$\sum_{k=1}^{n} I_k \, d\Phi_k = d_\xi W + f \, d\xi. \tag{6.12.4}$$

Praktisch interessiert uns der Fall konstanter Ströme. Verändert ein Stromkreis seine Lage, so ändert sich zwangsläufig auch Φ_k. Die dadurch bedingte Energieänderung des Feldes ist dann

$$d_\xi W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} I_k \, d\Phi_k.$$

Ein Vergleich mit der Gleichung (6.12.4) zeigt, daß die Kraft durch

$$f = + \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_{I_k = \text{const}}$$

erhalten wird.

Demnach wächst bei konstantem Strom und positiver äußerer Arbeit auch die Energie des Feldes zu Lasten der Energie der Stromquellen (Abb. 356). Bei konstantem Fluß ergibt sich aus Gleichung (6.12.4)

$$f = -\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)_{\Phi = \text{const}} .$$

Diese Beziehung wurde bereits im vorigen Abschnitt benutzt.

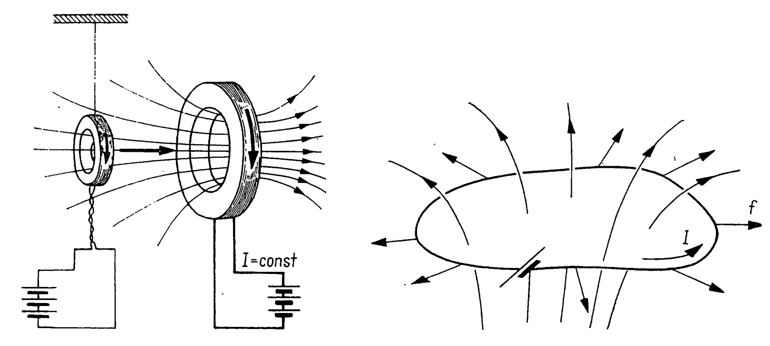


Abb. 356. Energieänderung des Feldes bei konstantem Strom

Abb. 357. Vom Leiter umfaßter Kraftfluß

Beispiele und Ergänzungen

1. Mit Hilfe der so allgemein ausgedrückten Kraft können natürlich auch quantitative Ergebnisse gewonnen werden. Doch meistens ist es wichtiger, von der Richtung der Kraft rasch ein qualitatives Bild zu erhalten. Die Wirkung der Kraft ist so gerichtet, daß sie den magnetischen Energieinhalt des Feldes zu erhöhen trachtet; dies bedeutet im Fall eines einzigen Leiters, daß die Kraft die Selbstinduktivität zu erhöhen bestrebt ist, d. h., daß die Leitung stets einen größeren Kraftfluß umschließen möchte (Abb. 357).

2. Aus dem vorher Gesagten können über das Verhalten von Strömen in Flüssigkeiten interessante Folgerungen gezogen werden. Die Selbstinduktivität eines massiven Leiters ist um so größer, je kleiner sein Querschnitt ist. Die Kraft ist daher bestrebt, den Querschnitt zu verkleinern. Der Querschnitt geschmolzenen Eisens verengt sich z. B. in einem Niederfrequenz-Induktionsofen, bis schließlich der Strom unterbrochen wird. Damit wird auch die Kraftwirkung unterbrochen, und der Stromkreis schließt sich wieder. Diese Erscheinung ist als „Pinch-Effekt“ bekannt (Abb. 358). Sie tritt auch dann auf, wenn ein

Strom durch hochionisierte Gase (Plasmen) fließt. Die Kräfte komprimieren das Plasma und erhitzen es bis zu Temperaturen von vielen Millionen Grad.

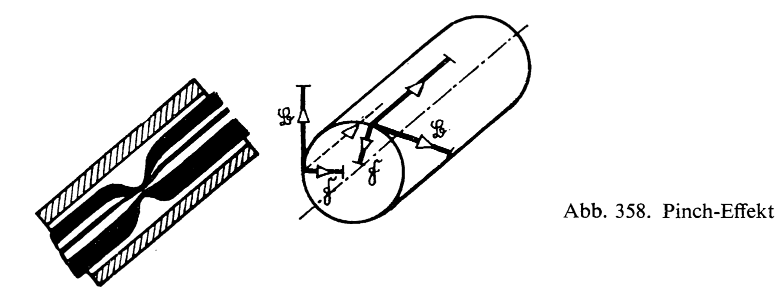


Abb. 358. Pinch-Effekt

3. Eine in ein homogenes Feld gebrachte ringförmige Flüssigkeit (z. B. geschmolzenes Eisen) umfaßt dann den stärksten Kraftfluß, wenn sie wie in Abb. 359 an der äußeren Wand hinaufgekrochen ist. Dagegen leistet die Schwerkraft Widerstand. So nimmt die Flüssigkeit eine Gleichgewichtslage ein. Diese Erscheinung vermindert die Aufnahmefähigkeit eines Schmelzofens.

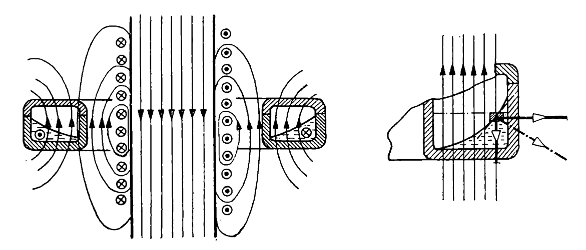


Abb. 359. Ringförmiger Induktionsofen

4. Wenn in

$$f = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)_{I=\mathrm{const}}$$

die Beziehung der Energie

$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

eingesetzt wird, erhält man

$$f = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial \xi}.$$

Demnach wirkt z. B. auf einen kreisförmigen Leiter die Kraft

$$F = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial r}.$$

Die Selbstinduktion einer einzigen kreisförmigen Windung beträgt

$$L = \mu r \left(\ln \frac{8r}{a} - 2 \right),$$

wobei r den Halbmesser des Kreises und a den Halbmesser des Leitungsquerschnittes bedeuten. Nach Durchführung der Differentiation erhält man

$$F = \frac{\mu}{2} I^2 \left(\ln \frac{8r}{a} - 1 \right) = \frac{\mu}{2} I^2 \ln \frac{8r}{ae}.$$

Mit dieser Beziehung kann annähernd die radiale Kraft bestimmt werden, welche auf eine einzelne Wicklung im Transformator bei einem Kurzschluß wirkt.

6.13. Die Energie-Feldstärke-Beziehung

Im Abschn. 6.9. wurde gezeigt, daß die Energie $\frac{1}{2}LI^2$ eines einzelnen Solenoids in der Form

$$\frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{H}\mathfrak{B} V$$

geschrieben werden kann, d. h., daß sie sich mit Hilfe der Energiedichte des Feldes ausdrücken läßt. Im allgemeinen Fall wird das Feld in kleine Volumenelemente dV unterteilt, in welchen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ als konstant angenommen werden können. Die Energie lautet demnach

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathfrak{H}\mathfrak{B}\, dV.$$

Um dies richtig zu verstehen, wird das Feld in elementare Kraftflußröhren aufgeteilt. In einer solchen Röhre sei der Kraftfluß $d\Phi$ konstant (Abb. 360). Die Energie ist

$$W = \frac{1}{2} I\Phi = \frac{1}{2} I \sum d\Phi.$$

Man wähle nun eine beliebige Röhre, auf deren Achse

$$\oint_L \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = I$$

gilt.

Die in einer einzigen Kraftflußröhre gespeicherte Energie ist

$$dW = \frac{1}{2}\, d\Phi \oint_L \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l}.$$

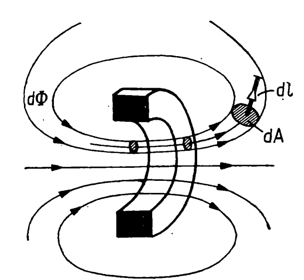


Abb. 360. Elementare Kraftflußröhre

Der Wert des Linienintegrals folgte aus dem Grenzwert von

$$\sum H\, dl.$$

Somit ist

$$dW = \frac{1}{2} \sum d\Phi H\, dl.$$

Der Kraftfluß $d\Phi$ beträgt

$$d\Phi = B\, dA.$$

Somit wird die Energie einer einzelnen Kraftflußröhre

$$dW = \frac{1}{2} \sum BH\, dA\, dl = \frac{1}{2} \sum BH\, dV.$$

Man erhält also die in einer einzigen Kraftflußröhre befindliche magnetische Energie, wenn man den Ausdruck $\frac{1}{2}HB$ über das ganze Volumen der Kraftflußröhre summiert. Die volle Feldenergie bekommt man dagegen, wenn die Energiedichte $\frac{1}{2}\mathfrak{H}\mathfrak{B}$ über das ganze Feld summiert wird:

$$W = \frac{1}{2} \sum HB\, dV = \frac{1}{2} \int_V \mathfrak{H}\mathfrak{B}\, dV.$$

Die Energiebeziehungen im magnetischen und elektrischen Feld können demnach folgendermaßen gegenübergestellt werden:

Die Energiedichte des elektrischen Feldes ist

$$w_e = \frac{1}{2} ED.$$

Die Energiedichte des magnetischen Feldes ist

$$w_m = \frac{1}{2} HB.$$

Die Energie eines Kondensators beträgt

$$W = \frac{1}{2} CU^2.$$

Die Energie einer Spule beträgt

$$W = \frac{1}{2} LI^2.$$

Die Feldenergie mehrerer Leiter ist

$$W = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{1}{2} c_{ik} U_i U_k.$$

Die Feldenergie mehrerer Stromkreise ist

$$W = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{1}{2} L_{ik} I_i I_k.$$

Beispiele und Ergänzungen

Ein elektrisches bzw. magnetisches Feld entsteht dadurch, daß ein Kondensator bzw. eine Spule an eine Stromquelle geschaltet wird. Die Stromquelle baut im Augenblick des Einschaltens bzw. in einer endlichen Zeitspanne nach dem Einschalten das elektrische bzw. magnetische Feld auf. Prinzipiell benötigt man zur Erhaltung der einmal erzeugten Felder, wenn diese konstant bleiben, keine weitere Energie. Praktisch liegt die Sache anders. Während ein gut isolierter Kondensator reine Energie im geladenen Zustand tagelang behält, entwickelt ein Strom in einer Spule ständig die JOULEsche Wärme I^2R. Man kann zwar durch Vergrößerung des Drahtquerschnittes den Widerstand R sehr klein machen, doch hat dies seine praktischen Grenzen. Die Aufrechterhaltung eines starken magnetischen Feldes über längere Zeit erfordert daher eine ständige Energiezufuhr, die bei großen Kraftflüssen sehr beträchtlich sein kann. Als Beispiel sei ein Elektromagnet angeführt, der für gewisse Präzisionsmessungen die Herstellung eines sehr starken homogenen magnetischen Feldes zuläßt. Mit Hilfe der in Abb. 361 gezeigten zwei Spulen kann eine Feldstärke von $3{,}5 \cdot 10^6$ A/m erzeugt werden. Die größte Abweichung vom homogenen Feld beträgt entlang einer etwa 15 mm langen Strecke an der Achse 10^{-3} Prozent. Die Spulen verbrauchen 1700 kW, vergleichbar mit dem Verbrauch einer elektrischen Lokomotive. Die JOULEsche Wärme wird durch Kühlwasser abgeführt. Heute kann man mit Hilfe supraleitender Metalle magnetische Felder bis zu $10\,\mathrm{Vs/m^2} = 10^5$ G ohne JOULEsche Wärme herstellen.

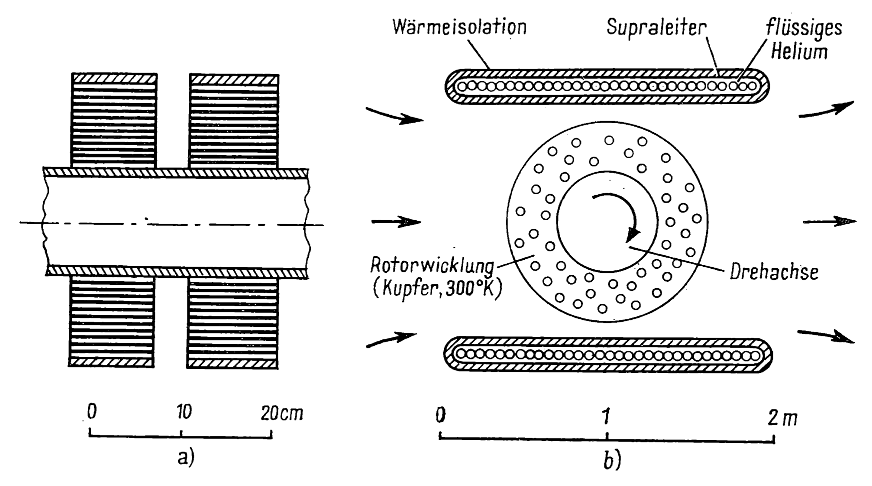


Abb. 361. a) Spule zur Erzeugung eines homogenen Feldes von 3500000 A/m
b) Skizze eines Generators von 600 MW Leistung (das magnetische Feld wird mit Hilfe von Supraleitern erzeugt) (nach R. McFee)

6.14. Beweis der Gleichheit von L_{ik} und L_{ki}

Mit Hilfe der bisherigen Kenntnisse kann nun bewiesen werden, daß zwischen zwei Kreisen von einem einzigen Gegeninduktionskoeffizienten $L_{ik} = L_{ki}$ gesprochen werden kann, d. h., daß die Gegeninduktivität des Kreises (i), bezogen auf den Kreis (k), gleich der Gegeninduktivität des Kreises (k), bezogen auf den Kreis (i), ist. Aus

$$\Phi_k = L_{ki} I_i$$

folgt für $I_i = 1$ und $I_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n,\ k \neq i)$

$$\Phi_k = L_{ki}.$$

L_{ki} ist daher jener Kraftfluß, den der Leiter (k) umschließt, wenn nur im Kreis (i) ein Strom von Einheitsgröße fließt.

$$\Phi_i = L_{ik}$$

bedeutet analog den Kraftfluß, den der Leiter (i) umschließt, wenn nur im Kreis (k) ein Strom von Einheitsgröße fließt. Der physikalische Inhalt der Bedingung $L_{ik} = L_{ki}$ ist also, daß der Kreis (k) denselben Kraftfluß umschließt, wenn im Kreis (i) ein Strom bestimmter Größe fließt, wie der Kreis (i), wenn im Kreis (k) derselbe Strom fließt (Abb. 362). Einfachheitshalber betrachten wir nur zwei Kreise. Nach (6.12.2) ist dann die Energie des Feldes, wenn in

dem einen Kreis der Strom I_1, im zweiten der Strom I_2 fließt:

$$W = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + \frac{1}{2} L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{21} I_1 I_2 . \qquad (6.14.1)$$

Die Gleichung (6.12.2) wurde erhalten, indem untersucht wurde, welche Energie im Fall einer gleichzeitigen und gleichmäßigen Erhöhung aller Ströme von den Stromquellen der einzelnen Kreise aufgebracht wird.

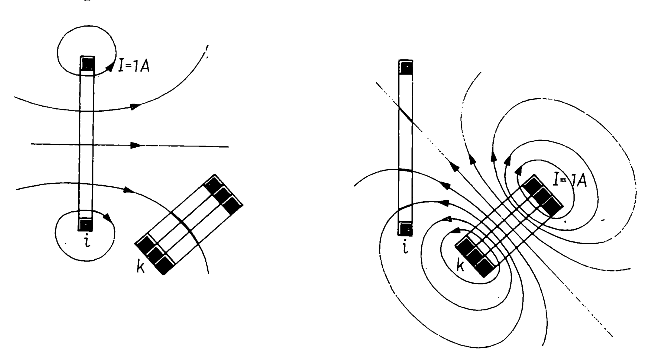


Abb. 362. Beweis der Gleichheit von L_{ki} und L_{ik}

Man muß jedoch dieselbe Energie erhalten, wenn man zuerst den Strom des Kreises (1) bis zu einem Endwert erhöht und dann, diesen Wert konstant haltend, den Strom I_2 einschaltet. Die zu I_1 gehörende Feldenergie beträgt $\frac{1}{2}L_{11}I_1^2$, während die im Kreis (2) eingeschaltete Stromquelle den Strom I_2 durch den Energieaufwand $\frac{1}{2}L_{22}I_2^2$ erzeugt.

Gleichzeitig induziert dieser zunehmende Strom während der Zeit dt im Stromkreis (1) einen Spannungsimpuls

$$L_{12} \frac{dI_2}{dt} dt = L_{12}\, dI_2 .$$

Um zu erreichen, daß im Kreis (1) der Strom den konstanten Wert I_1 beibehält, muß die Stromquelle (1) eine Überspannung abgeben, die während der Zeit dt eine Mehrarbeit

$$I_1\, dU_1 = I_1 L_{12}\, dI_2$$

für sie bedeutet. Die ganze Mehrarbeit beträgt

$$\int_0^{I_2} L_{12} I_1\, dI_2 = L_{12} I_1 I_2 .$$

Diese Arbeit wird ausschließlich zur Erhöhung der Feldenergie verwendet, da I_1 konstant ist und somit keine zusätzliche JOULEsche Wärme entwickelt wird. Somit ist die Gesamtenergie

$$W = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + L_{12} I_1 I_2. \tag{6.14.2}$$

Beim Vergleich der Gleichungen (6.14.1) und (6.14.2) sieht man, daß

$$L_{12} I_1 I_2 = \frac{1}{2} L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{21} I_1 I_2$$

ist, woraus

$$L_{12} = L_{21}$$

folgt.

Es wurde schon bei der Definition von L_{ik}, besonders aber bei der Ableitung der Energiegleichung, vorausgesetzt, daß der Kraftfluß Φ von den Strömen *linear* abhängt. Diese Tatsache kann auch so ausgedrückt werden, daß unsere bisherigen Überlegungen nur dann bestehen, wenn das Prinzip der Überlagerung gilt. Es gilt z. B. nicht – wegen der auftretenden Sättigungserscheinungen –, wenn sich im Feld ferromagnetische Stoffe befinden (Abb. 363).

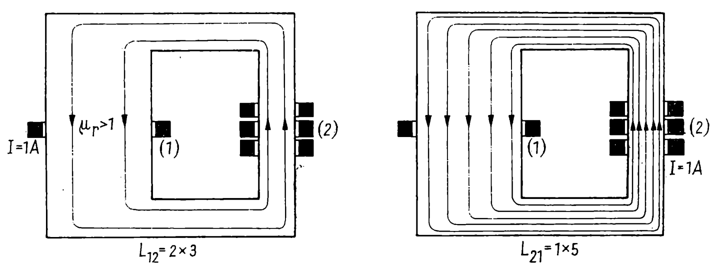


Abb. 363. Nichtproportionaler Kraftfluß bei Anwesenheit von ferromagnetischen Stoffen

Wir haben bisher stillschweigend vorausgesetzt, daß in jedem Stromkreis irgendeine Richtung positiv angenommen wird, aus der das positive oder negative Vorzeichen der Ströme folgt. Diese Richtung kann willkürlich festgesetzt werden. Die positive Richtung der vom Stromkreis gebildeten Fläche ist dann zur Stromrichtung durch die Rechtsschraubenregel bestimmt. Der Kraftfluß ist positiv, wenn die Induktionslinien in Richtung der positiven Normalen verlaufen. Daraus folgt, daß I_1 und Φ stets gleiches Vorzeichen

haben, so daß das Verhältnis

$$L_{11} \equiv L_1 = \frac{\Phi_1}{I}$$

in jedem Fall positiv ist; dies ergibt sich übrigens auch aus dem Ausdruck der magnetischen Energie.

Der vom Kreis (i) umfaßte Teil des Kraftflusses, welcher vom Strom I_k des Kreises (k) erzeugt wird, kann hingegen positiv oder negativ sein – unabhängig vom Vorzeichen des Stromes I_k –, so daß das Verhältnis

$$L_{ik} = \frac{\Phi_{ik}}{I_k}$$

positiv, negativ oder Null sein kann. In Abb. 364 sind diese Verhältnisse veranschaulicht.

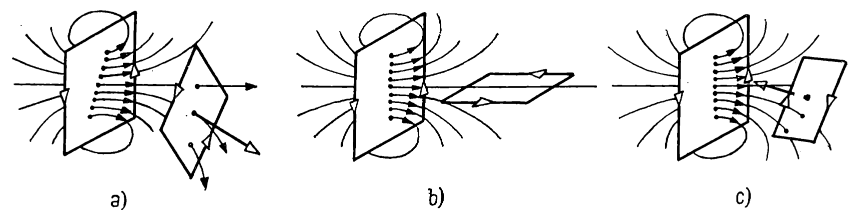


Abb. 364. Gegeninduktivität
a) positiv, b) Null, c) negativ

Demzufolge kann das aus der wechselseitigen Wirkung stammende dritte Glied der Gleichung für die Gesamtenergie beider Kreise

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + L_{12} I_1 I_2$$

die Gesamtenergie erhöhen oder vermindern, bezogen auf die Energie weit voneinander entfernter Kreise, wo die Wechselwirkung verschwindet.

Bei zwei Kreisen existiert ein weiterer wichtiger Zusammenhang zwischen der Selbstinduktion und der Gegeninduktion der Kreise. In Abb. 365 hat nur

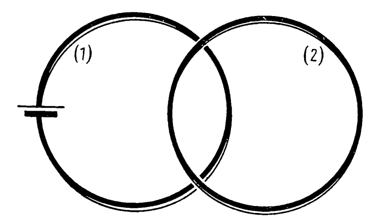


Abb. 365. Zur Ableitung des Kopplungsfaktors

der Kreis (1) eine äußere Stromquelle, der Kreis (2) ist kurzgeschlossen. Wir nehmen an, daß der Widerstand vernachlässigbar klein ist, so daß keine JOULEsche Wärme entwickelt werden kann. Die Grundgleichungen lauten dann

$$U_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt},$$

$$0 = L_{12} \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt}.$$

Wenn die zweite Gleichung nach dI_2/dt aufgelöst und in die erste Gleichung eingesetzt wird, erhält man

$$U_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} - \frac{L_{12}^2}{L_2} \frac{dI_1}{dt} = L_1 \left(1 - \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2}\right) \frac{dI_1}{dt}.$$

Die Existenz des zweiten Kreises hat damit scheinbar den Induktionskoeffizienten des Kreises (1) auf den Wert

$$L_1^* = L_1 \left(1 - \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2}\right)$$

verringert. Es ist leicht einzusehen, daß L_1^* immer einen positiven Wert besitzt. Wäre dies nicht so, dann würde die Gleichstromquelle bis zum Zeitpunkt t eine negative Arbeit leisten, wenn sie im Zeitpunkt $t = 0$ an den bisher stromlosen Stromkreis geschaltet wurde; sie würde also die Arbeit

$$\int_0^t U_1 I_1 \, dt = \frac{1}{2} L_1^* I_1^2$$

von irgendwo aufnehmen, was selbstverständlich widersinnig ist. Da L_1 ebenfalls positiv ist, muß

$$1 - \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2} > 0$$

sein. Dies führt zu der Ungleichung

$$L_{12}^2 < L_1 L_2.$$

Die dimensionslose Zahl

$$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}},$$

die demnach immer kleiner als 1 ist, nennt man den Kopplungsfaktor.

6.15. Einige für die Praxis wichtige Energieumwandlungen

Wir haben bisher die auf die Ladungen und stromführenden Leitungen wirkenden Kräfte behandelt und die Energie des elektromagnetischen Feldes berechnet. Im folgenden soll eingehend behandelt werden, aus welchen Energieformen eine Stromquelle ihre Energie bezieht und in welche andere Energiearten die elektrische Energie umgewandelt werden kann. Zuerst sollen einige grundlegende Energieumwandlungen untersucht werden.

6.15.1. *Die Umwandlung mechanischer Arbeit in elektrische Energie*

In der Praxis liefern den größten Teil der elektrischen Energie Generatoren, die von Kraftmaschinen getrieben werden. Wir denken uns die im magnetischen Feld rotierende Wicklung eines Generators durch einen einzigen Leiter ersetzt

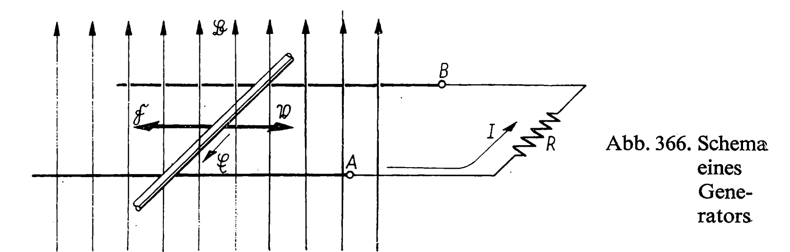


Abb. 366. Schema eines Generators

(Abb. 366), der sich im homogenen magnetischen Feld mit der Geschwindigkeit 𝔳 bewegt. (In der Praxis befindet sich zwar gewöhnlich die Spule in Ruhe, und das magnetische Feld dreht sich, doch ist dies hier belanglos.) Die induzierte Spannung ist

$$U = lvB.$$

Wenn der Generator belastet, d. h. an die Klemmen A und B ein Widerstand R geschaltet wird, erhält man als von der Stromquelle abgegebene Leistung

$$P_{\text{el}} = UI = lvBI.$$

Diese Leistung entstammt natürlich einer in der Zeiteinheit geleisteten mechanischen Arbeit, denn auf den Leiter von der Länge l wirkt im magnetischen Feld mit der Induktion B die Kraft lIB, wenn darin der Strom I fließt. Gegen diese Kraft verrückt man in jeder Sekunde den Leiter um die Strecke v, so daß die mechanische Leistung

$$P_{\text{mech}} = Fv = lIBv$$

ist. Aus der Gleichheit beider Ausdrücke folgt

$$P_{\text{mech}} = P_{\text{el}}.$$

Es wird also gerade eine so große elektrische Leistung erzielt, wie die aufgewendete mechanische Leistung beträgt. Diese Leistungsumsetzung vollzieht sich in den Generatoren.

Aus der kinetischen Energie geladener Teilchen kann direkt elektrische Energie gewonnen werden.

Ein mit der Ladung Q versehenes Teilchen bewege sich im Feld eines beliebigen Kondensators mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ gegen die Feldrichtung (Abb. 367). Dann leistet das Kraftfeld an der Ladung innerhalb der Zeit dt die Arbeit

$$\mathfrak{F}\,d\mathfrak{l} = \mathfrak{F}\,\mathfrak{v}\,dt = Q\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{v}\,dt.$$

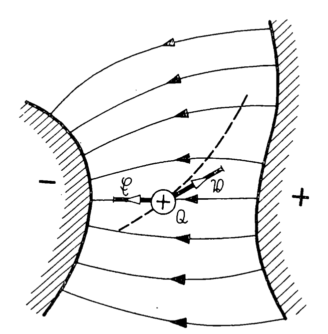


Abb. 367. Bewegte Ladung in einem Kondensator

Diese Arbeit ist hier, da $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{v}$ entgegengesetzt gerichtet sind, negativ. Das bedeutet, daß nun vom geladenen Teilchen eine Arbeit geleistet wird. Die kinetische Energie des Teilchens vermindert sich dementsprechend. Infolge der Bewegung der Ladung wird im äußeren Kreis ein Strom influenziert, dessen Größe aus dem Energieerhaltungssatz folgt:

$$Ui\,dt = Q\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{v}\,dt,$$

$$Ui = Q\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{v}.$$

Das Vorzeichen der rechten und damit auch der linken Seite ist negativ, was besagt, daß der Kondensator von der Spannungsquelle keine Energie aufnimmt, sondern dieser eine solche zuführt. Demnach wird hier auf Kosten der kinetischen Energie des Teilchens elektrische Energie gewonnen.

Wenn am Kondensator keine Spannung liegt, gelangt das geladene Teilchen unbehindert auf die eine Platte und ladet diese auf die Spannung Q/C auf, wobei es seine kinetische Energie in Form von Wärme der Elektrode übergibt.

Das nächste Teilchen bewegt sich schon im Feld des vorigen und bewegt sich deshalb etwas langsamer. Es muß darauf hingewiesen werden, daß sich die Energie des Kondensators beim Eintreffen des Teilchens nicht sprunghaft erhöht, sondern kontinuierlich während der ganzen Bewegung des Teilchens anwächst. Der Kondensator wird schließlich auf eine Spannung aufgeladen, bei der die potentielle Energie eines Teilchens gleich dessen kinetischer Energie ist:

$$QU = \frac{1}{2} mv^2,$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{m}{Q} v^2.$$

Falls die Platten des Kondensators (Abb. 368) von Beginn an mit einem Widerstand verbunden waren, gibt bereits das erste Teilchen Energie ab: Zum Verschiebungsstrom der sich bewegenden Ladung gehört jetzt ein Leitungs-

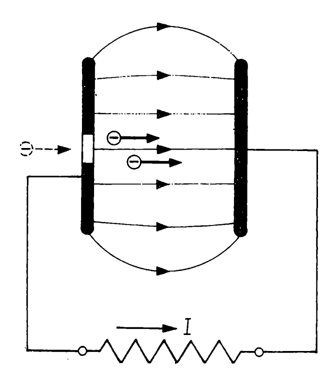


Abb. 368. Umwandlung der kinetischen Energie geladener Teilchen in elektrische

strom, welcher den Verschiebungsstrom schließt; der Leitungsstrom erzeugt einen Spannungsabfall über dem Widerstand, so daß sich diese Ladung bereits in einem Gegenfeld bewegt.

Diese Art der Energieumwandlung findet im Klystron statt. Es weist auch vielleicht den Weg, Wärmeenergie oder auch Kernenergie unmittelbar in elektrische Energie umzuwandeln.

Bewegt sich die Ladung in Richtung des Feldes, dann entsteht aus der elektrischen eine mechanische, hier kinetische Energie; dies wird im nächsten Abschnitt behandelt.

6.15.2. *Die Umwandlung elektrischer Energie in mechanische Energie*

Ein geladenes Teilchen bewege sich jetzt zwischen den Platten des im vorhergehenden Abschnitt behandelten Kondensators durch Einfluß des Feldes in

Richtung des Feldes (Abb. 369). Die Ladung sei Q. Die Stromquelle gibt jetzt eine Leistung UI an das Teilchen ab und erhöht so dessen kinetische Energie je Zeiteinheit um

$$UI = Q\mathfrak{E}\mathfrak{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,mv^2\right).$$

Abb. 369. Erhöhung der Bewegungsenergie der bewegten Ladung

Wenn das Teilchen vom Punkt (1) zum Punkt (2) gelangt, beträgt die vom Kraftfeld am Teilchen geleistete Arbeit

$$W_{1,2} = \int_{(1)}^{(2)} \mathfrak{F}\,d\mathfrak{l} = \int_{(1)}^{(2)} Q\mathfrak{E}\,d\mathfrak{l} = Q(U_2 - U_1).$$

Die Änderung der Geschwindigkeit des Teilchens folgt aus der Beziehung $\mathfrak{F} = m\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$:

$$W_{1,2} = \int_{(1)}^{(2)} m\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\,d\mathfrak{l} = \int_{(1)}^{(2)} m\,\frac{d\mathfrak{l}}{dt}\,d\mathfrak{v} = \int_{(1)}^{(2)} m\mathfrak{v}\,d\mathfrak{v} = \frac{1}{2}\,mv^2\Big|_1^2.$$

Die Energiezunahme auf Kosten des elektrischen Feldes ist daher

$$Q(U_2 - U_1) = \frac{1}{2}\,mv_2^2 - \frac{1}{2}\,mv_1^2.$$

Die kinetische Energie des Teilchens beträgt, wenn es, mit der Anfangsgeschwindigkeit Null beginnend, von der einen zur anderen Elektrode gelangt ist,

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = QU.$$

Diese Gleichung trat schon im vorangehenden Abschnitt auf, wo mit der kinetischen Energie eines Teilchens ein Kondensator aufgeladen wurde;

hier wird jedoch auf Kosten des Feldes kinetische Energie gewonnen. Die so erhaltene kinetische Energie verwandelt sich zum größten Teil in Wärme, wenn das Teilchen auf die Gegenelektrode prallt, kann aber auch für andere Zwecke verwendet werden, wenn z. B. in die Elektrode eine Öffnung geschnitten wird und das Teilchen im feldfreien Raum weiterfliegen kann.

Diese Art der Energieumwandlung wird bei Röntgenröhren, bei einigen Typen von Vakuumglühöfen, bei verschiedenen kernphysikalischen Beschleunigungsvorrichtungen, in Katodenstrahlröhren und zahlreichen anderen Apparaten angewendet.

Zu großen mechanischen Leistungen kann man auch hier mit Hilfe des magnetischen Feldes kommen.

Ein Leiter von der Länge l soll gemäß Abb. 370 in ein magnetisches Feld mit der Induktion B gebracht und mit einer Stromquelle der Spannung U verbunden werden, die im Ruhezustand einen Strom I_0 durch den Leiter

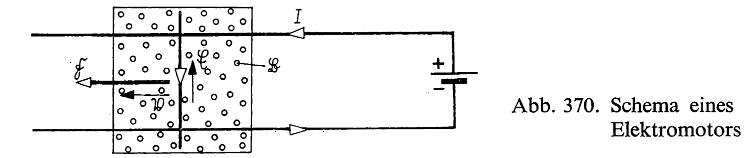


Abb. 370. Schema eines Elektromotors

treibt. Die von der Stromquelle jetzt abgegebene Leistung UI_0 wird ausschließlich zur Deckung der sich in Wärme umwandelnden Leistung I_0^2R verwendet. Auf den Leiter wirkt in diesem Fall die Kraft

$$F = I_0 l B.$$

Diese Kraft beschleunigt den Leiter. Wenn sich jedoch der Leiter bereits mit der Geschwindigkeit v bewegt, wird in ihm nach dem Induktionsgesetz die Spannung

$$U_i = vlB$$

induziert, die gegen die Spannung der Stromquelle wirkt (Abb. 370) und dadurch den Strom auf den Wert

$$I = \frac{U - U_i}{R}$$

herabsetzt. Aus dieser Gleichung folgt

$$U - U_i = IR.$$

Nach Multiplikation mit I und Umformung erhält man

$$UI = I^2R + U_iI$$

und kann daraus ersehen, daß die Stromquelle mehr Leistung abgibt, als in der Leitung in Wärme umgewandelt wurde. Diese Mehrleistung $U_i I$ ist es, die den Leiter beschleunigt. Es soll angenommen werden, daß sich die Leitung vollständig reibungslos bewegen kann. Man könnte dann glauben, daß die Geschwindigkeit des beweglichen Leiters mit der Zeit über alle Grenzen wächst. Dies ist aber nicht so. Je größer seine Geschwindigkeit ist, desto größer wird die induzierte Spannung, und bei einer ganz bestimmten Geschwindigkeit wird diese induzierte Gegenspannung genauso groß wie die von außen angelegte Spannung. Bei dieser Geschwindigkeit fließt daher kein Strom durch den Leiter, damit tritt auch keine Kraftwirkung auf, der Leiter wird demnach nicht weiter beschleunigt. Die Endgeschwindigkeit kann aus $U = vlB$ berechnet werden. Es ist auch zu sehen, daß die Geschwindigkeit sehr groß werden kann, wenn das magnetische Feld sehr schwach ist. Mit Hilfe der hier gegebenen schematischen Darstellung kann die paradoxe Erscheinung erklärt werden, daß Gleichstrommotoren dann hochlaufen, d. h. gefährliche Umdrehungsgeschwindigkeiten erreichen, wenn sich ihr magnetisches Feld aus irgendeinem Grund verringert.

Wenn das Leitungsstück eine bestimmte Kraft $F = IlB$ zu überwinden hat (z. B. wenn der Motor belastet wird), kann daraus die Stromstärke

$$I = \frac{F}{lB}$$

bestimmt werden. Falls die Spannung der Batterie U und die induzierte Spannung U_i betragen, kann die induzierte Spannung aus dem Zusammenhang

$$\frac{U - U_i}{R} = I$$

berechnet und aus der Beziehung

$$U_i = vlB$$

die Geschwindigkeit des Leiters ermittelt werden. Man sieht, daß die mechanische Leistung Fv und die neben der Wärmeleistung dem Motor zugeführte Leistung $U_i I$ übereinstimmen.

Diese Art der Energieumwandlung findet in Elektromotoren statt.

6.15.3. *Überführung einer elektrischen Energie in eine ebensolche mit anderen Kennwerten*

Von den in Abb. 371 gezeichneten Stromkreisen enthält nur der Stromkreis (1) eine Stromquelle und nur der Stromkreis (2) einen Verbraucher. Es sollen die Energieverhältnisse untersucht werden. Der Strom im Kreis (2)

sei zunächst konstant, der Leistungsverbrauch ist $I_2^2 R_2$. Der konstante Strom kann nur dann bestehen, wenn der Strom im Kreis (1) ständig gleichmäßig erhöht wird, wodurch im Kreis (2) eine konstante Spannung

$$U_2 = L_{12} \frac{dI_1}{dt} = I_2 R_2$$

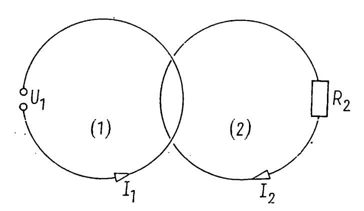


Abb. 371. Schema eines Transformators

aufrechterhalten wird. So liefert die Stromquelle (U_1) auch die Leistung für den Kreis (2). Für den Kreis (1) gilt

$$U_1 = L_{11} \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

und, da I_2 konstant ist,

$$U_1 = L_{11} \frac{dI_1}{dt}.$$

Werden beide Seiten dieser Gleichung mit I_1 multipliziert, erhält man die abgegebene Leistung der Stromquelle (1):

$$U_1 I_1 = L_{11} I_1 \frac{dI_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_{11} I_1^2\right). \tag{6.15.1}$$

Es wäre nun zu untersuchen, wofür diese Leistung verwendet wird. Man kann erwarten, daß ein Teil für die Erhöhung der Feldenergie, der Rest zur Deckung der Wärmeentwicklung im Kreis (2) verwendet wird. Die zeitliche Änderung der Feldenergie beträgt

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 - L_{12} I_1 I_2\right],$$

wobei das negative Vorzeichen deshalb auftritt, weil gemäß der LENZschen Regel I_1 und I_2 entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Da I_2 konstant ist, bekommt man

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_{11} I_1^2\right) - I_2 L_{12} \frac{dI_1}{dt}.$$

Nach Einsetzen der Gleichung (6.15.1) folgt daraus

$$\frac{dW}{dt} = U_1 I_1 - I_2 L_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

oder

$$U_1 I_1 = \frac{dW}{dt} + I_2 L_{12} \frac{dI_1}{dt} = \frac{dW}{dt} + I_2^2 R.$$

Die Stromquelle (U_1) gibt genausoviel Leistung ab, wie zur Erhöhung der Feldenergie und zur Deckung des Wärmeverlustes notwendig ist. Wenn I_1 sich zeitlich nicht linear ändert, sondern z. B. sinusförmig, ändert sich I_2 natürlich ebenso, doch ändert dies am Energiegleichgewicht nichts.

Die hier beschriebene Energieumwandlung findet in jedem Transformator statt.

Im vorangehenden Abschnitt wurde bereits gezeigt, daß einem geladenen Teilchen, das zwischen den Platten eines Kondensators in der Richtung der Kraftlinien beschleunigt wird, von der Stromquelle eine Leistung abgegeben wird. Dasselbe gilt für eine Ladungsmenge aus vielen Teilchen, die sich im Kraftfeld bewegen. Wird eine Ladungsmenge zeitlich periodisch in das Feld gebracht, so wird der Strom der äußeren Stromquelle auch zeitlich periodisch schwanken. An einem Widerstand im äußeren Kreis erhält man die Wärmeleistung dieses Wechselstromes oder auch eine für jeden anderen Zweck verwendbare Wechselstromleistung. So liefert die äußere Stromquelle, meist eine Gleichstromquelle, einerseits die Leistung zur Beschleunigung der Ladungen, andererseits eine Wechselstromleistung. Die beschleunigten Ladungen stoßen auf die Elektrode und erzeugen Wärme, während die Wechselstromleistung z. B. mit Hilfe eines Lautsprechers in Schallenergie umgewandelt werden kann.

Auf diesem Prinzip der Umwandlung einer Gleichstromenergie einer Batterie in eine Wechselstromenergie hoher Frequenz beruhen die Verstärkerröhren. Die zeitlich periodischen Ladungsmengen können durch geeignete Steuerung der Röhrengitter erzeugt werden.

6.15.4. *Die Umwandlung elektrischer Energie in Wärmeenergie*

Wenn ein Strom I durch einen Widerstand R fließt, verwandelt sich die Leistung I^2R in Wärme. Wir kennen auch die allgemeinere Formulierung dieses Gesetzes, wonach in einem Stoff mit der Leitfähigkeit γ die Feldstärke $\mathfrak{E}$ eine Stromdichte $\mathfrak{G}$ erzeugt, wodurch je Zeit- und Volumeneinheit die elektrische Energie

$$\mathfrak{E}\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{G}^2}{\gamma} = \varrho\mathfrak{G}^2$$

in Wärme umgewandelt wird. Im ganzen Raum verwandelt sich daher je Sekunde die Energie

$$\int_V \mathfrak{E}\mathfrak{G}\, dV = \int_V \frac{\mathfrak{G}^2}{\gamma}\, dV$$

in Wärme.

Die hier behandelte Energieumwandlung erfolgt in jedem Leiter, unabhängig davon, ob die Erzeugung von Wärmeenergie bezweckt wurde oder nicht.

Die elektrische Energie kann jedoch nicht nur auf diese Art in Wärmeenergie umgewandelt werden. Bei ferromagnetischen Stoffen erhält man auch bei der langsamsten Änderung des Feldes die aufgewendete Energie nicht gänzlich zurück; das Einstellen der elementaren magnetischen Bereiche erfolgt nicht reibungsfrei, so daß sich ein Teil der Energie bei der Magnetisierung und Entmagnetisierung irreversibel in Wärme umwandelt. Dies ist der Hysteresisverlust. Die Energie des Feldes hängt nicht nur von den Feldgrößen im Endstadium ab, sondern auch davon, wie dieses Stadium erreicht wurde. Dabei ist es nicht nötig, einen vollen Magnetisierungsumlauf durchzuführen. Selbstverständlich steht dazu nicht im Widerspruch, wenn dasselbe Endstadium mit denselben Feldgrößen durch Umsetzen verschieden großer Energiemengen erreicht werden kann. Es ist in dem einen Fall lediglich eine größere, im anderen Fall eine kleinere Energie in den Hysteresisverlust übergeführt worden. Diese Energieumwandlungen treten in Eisenkörpern von Maschinen und Transformatoren auf.

Ähnlich liegt der Fall auch bei den Dielektrika. Die Isolatoren besitzen immer eine, wenn auch sehr kleine, endliche Leitfähigkeit, und so vollzieht sich in ihrem Innern eine durch die Beziehung ϱG^2 bestimmte spezifische Wärmeentwicklung. Außerdem kann jedoch auch, ähnlich der magnetischen

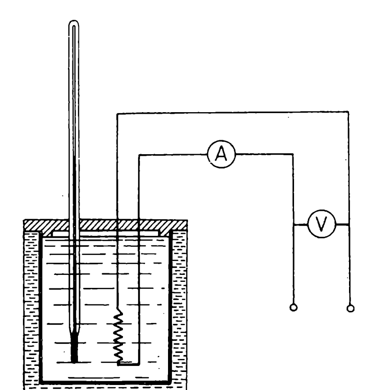


Abb. 372. Messung des Wärmeäquivalents der elektrischen Energie

Hysteresis, die Erscheinung einer dielektrischen Hysteresis auftreten. Selbst bei idealen Isolatoren mit der Leitfähigkeit Null erhält man bei einem Kreisprozeß nicht die ganze zugeführte Energie zurück, weil die Polarisation des Dielektrikums gleichfalls mit einem endlichen, irreversiblen Energieaufwand verbunden ist.

Die endliche Leitfähigkeit der Isolatoren verursacht zusammen mit der dielektrischen Hysteresis die Erwärmung der in einem Hochfrequenzfeld befindlichen Isolatoren.

Die Umrechnungskonstante zwischen der Einheit der elektrischen Energie (Ws) und der Wärmeenergie (cal) kann mit der in Abb. 372 dargestellten Versuchsanordnung gemessen werden. Das Ergebnis ist

$$1\ \mathrm{Ws} = 0{,}239\ \mathrm{cal},$$

$$1\ \mathrm{W} = 0{,}239\ \mathrm{cal/s}.$$

6.15.5. *Die Strahlungsleistung*

Die in Abb. 373 gezeichnete Anordnung, eine Stromquelle und einen Kondensator, denken wir uns mit einer beliebigen geschlossenen Fläche umgeben. Im Anfang sei der Kondensator von der Stromquelle getrennt und die

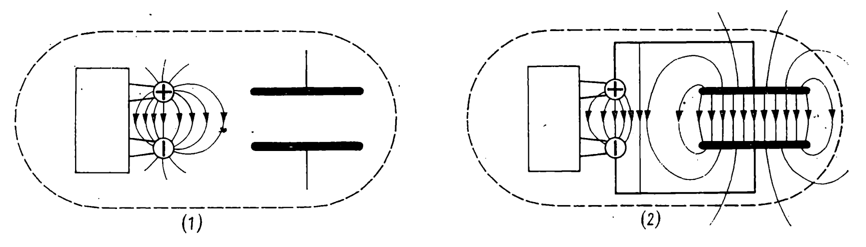


Abb. 373. Ein Teil der Feldenergie eines Kondensators befindet sich nach dem Einschalten außerhalb der gestrichelt gezeichneten Fläche. Die Energie müßte also durch diese Fläche hindurchströmen

Energie des elektrischen Feldes gleich Null, abgesehen von dem Feld, das in der Nähe der Klemmen der Stromquelle besteht. Wird nun der Kondensator an die Stromquelle geschaltet, so gibt die Stromquelle die Energie $\frac{1}{2}CU^2$ ab, die sich u. a. im elektrischen Feld des Kondensators wiederfindet. Bei der Untersuchung des Energiegleichgewichts im Innern des von der geschlossenen Fläche begrenzten Volumens kann festgestellt werden, daß die von der Stromquelle geleistete Arbeit größer ist als die Energie

$$\frac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2\, dV$$

des elektrischen Feldes. Ein Teil der Feldenergie befindet sich nämlich außerhalb der geschlossenen Grenzfläche. Wenn man mit der Vorstellung einer im Feld stetig verteilten Energie konsequent bleiben will, muß man behaupten, daß die im äußeren Feld nachweisbare Energie durch die Grenzfläche aus dem inneren Feld herausgeströmt ist. Die je Zeiteinheit durch die Fläche geströmte Energie muß gleich dem Energiezuwachs des äußeren Feldes sein. Es taucht die Frage auf, wie man diese durch die Fläche geströmte Energie berechnen kann, wenn die Feldstärke bekannt ist. Es steht fest, daß in einem statischen Feld keine Energieströmung auftreten kann, da im Innern und im Äußern eines einfach zusammenhängenden Gebietes jede Energie für sich konstant sein muß. Durch die Oberfläche kann in diesem Fall keine Energie geströmt sein. Wir haben aber im Moment des Einschaltens ein sich zeitlich änderndes Feld, so daß während der Aufladung des Kondensators eine Energie in den äußeren Raum gelangen kann. Untersucht man aber den Vorgang in einem Zeitpunkt, wo das elektrische Feld sich zeitlich und hier auch räumlich ändert, so hat man es nicht nur mit einem sich verändernden Feld zu tun, sondern gemäß den MAXWELLschen Gleichungen gleichzeitig auch mit einem magnetischen Feld. Dieses magnetische Feld ist an der Energieströmung in gleicher Weise beteiligt. Und zwar steht man bei der Entwicklung des elektrostatischen Feldes eines Kondensators einem sehr kompliziert gebauten elektromagnetischen Feld gegenüber, dessen quantitative Beschreibung nur in ganz speziellen Fällen möglich ist. Im folgenden soll mit Hilfe einiger spezieller Fälle versucht werden, die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten der Strahlungsenergieströmung zu bestimmen.

Wir wählen zunächst eine Anordnung, bei der die der geschlossenen Fläche entströmende Energie aus den Strom- und Spannungswerten bestimmt werden kann. Bekanntlich läßt sich die elektrische bzw. magnetische Feldstärke aus der Spannung bzw. aus dem Strom ermitteln. Im Endergebnis erhält man dann die durchströmende Leistung über die Feldgrößen.

In der Anordnung in Abb. 374 verlaufen zwei Leitungsschienen senkrecht zur Zeichenebene. Durch den Einfluß einer Gleichspannung U zwischen den

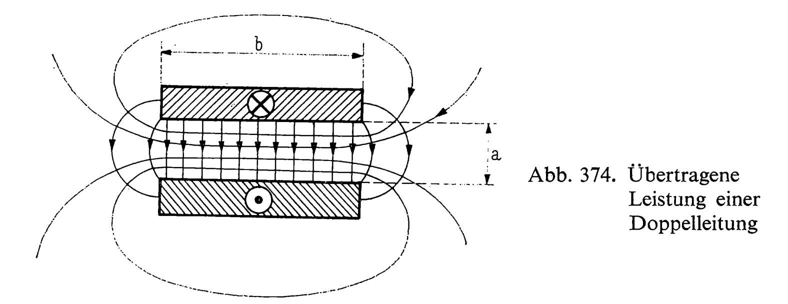


Abb. 374. Übertragene Leistung einer Doppelleitung

Leitungen fließt der Strom in der oberen Leitung in die Zeichenebene hinein, in der unteren Leitung aus der Zeichenebene heraus. An das Ende der Leitung werde als Belastung ein ohmscher Widerstand geschaltet. Vom Generator wird je Sekunde an den Verbraucher die Energie

$$P = UI$$

abgegeben. Abgesehen von den Randgebieten, kann die Feldstärke zwischen den Leitungen überall als konstant angenommen werden:

$$E = \frac{U}{a}.$$

Im stationären Zustand umgeben die magnetischen Feldlinien jeweils einen Leiter, und entlang einer solchen geschlossenen Linie gilt

$$\oint_L \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = I.$$

Aus der geometrischen Anordnung folgt, daß die magnetischen Kraftlinien sich im Feld zwischen den beiden Leitern sammeln und ebenfalls als homogen betrachtet werden können; sie können sogar außerhalb dieses Feldabschnittes in erster Näherung vernachlässigt werden. Für die magnetische Feldstärke erhält man daher mit den Bezeichnungen der Abb. 374

$$\oint_L \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} \approx Hb = I.$$

Die Leistung kann jetzt durch die magnetische und elektrische Feldstärke ausgedrückt werden:

$$P = UI = EaHb = EHA,$$

wobei die Fläche zwischen den Leitern mit A bezeichnet ist. Die Feldverhältnisse erlauben daher zu sagen, daß zwischen den Leitern durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit eine Energie EH strömt. Diese Gesetzmäßigkeit gilt ganz allgemein: Wenn irgendwo im Feld eine elektrische und eine magnetische Feldstärke gemessen werden können, so strömt an diesem Ort durch eine zu den Feldstärkevektoren senkrecht stehende Fläche von $1\,\text{m}^2$ je Sekunde die Energiemenge

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}.$$

Den Vektor $\mathfrak{S}$, dessen Betrag das Produkt der elektrischen und magnetischen Feldstärke, multipliziert mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels, ist und dessen Richtung auf der Richtung der magnetischen und auch auf der der

elektrischen Feldstärke senkrecht steht, nennt man den POYNTINGschen Vektor oder die Energiestromdichte (Abb. 375).

Obwohl die Ausdrücke *UI* und *EHA* dimensionsmäßig gleichwertig sind, sind sie physikalisch verschieden zu deuten. Im ersten Fall ist die Energieströmung materiegebunden. Im zweiten Fall strömt die Energie außerhalb der Leitung, d. h. im Dielektrikum. Da bei einem idealen Leiter die elektrischen

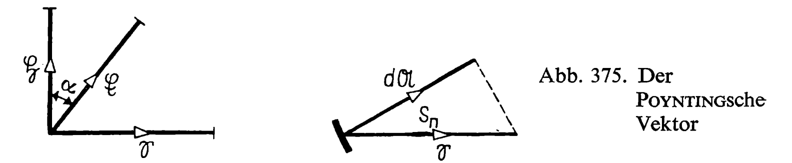


Abb. 375. Der POYNTINGsche Vektor

Kraftlinien überall senkrecht zur Oberfläche des Leiters stehen, verläuft unmittelbar an der Oberfläche die Energieströmung parallel mit dem Leiter. Im Innern des Leiters mit unendlich guter Leitfähigkeit hingegen ist die Feldstärke Null, da sonst im Sinne der Gleichung $\mathfrak{G} = \gamma\mathfrak{E}$ ein unendlich großer Strom fließen würde. Demnach muß der POYNTINGsche Vektor im Innern der Leitung ebenfalls gleich Null sein.

Wenn der Leiter eine endliche Leitfähigkeit besitzt, besteht auch in seinem Innern eine Feldstärke, und die elektrischen Kraftlinien stehen nicht senkrecht zur Oberfläche des Leiters, sondern sind etwas in Richtung der Energieströmung geneigt (Abb. 376). Der magnetische Feldstärkevektor liegt

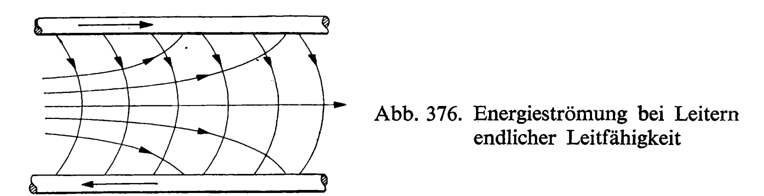


Abb. 376. Energieströmung bei Leitern endlicher Leitfähigkeit

in der senkrecht zur Achse des Leiters verlaufenden Ebene. Der elektrische Feldstärkevektor zeigt im Innern der Leitung in Richtung der Achse, genauer in Richtung des Stromes. Demnach wird der POYNTINGsche Vektor, da er sowohl zu $\mathfrak{E}$ als auch zu $\mathfrak{H}$ orthogonal ist, auch auf der Achse des Leiters senkrecht stehen. Seine Größe beträgt, da im Fall eines einzigen zylindrischen Leiters

$$E = \varrho G \quad \text{und} \quad H \cdot 2\pi r = GA$$

sind,

$$S = \varrho G \frac{GA}{2\pi r}.$$

In einem Leitungsabschnitt der Länge l strömt daher je Zeiteinheit die Energie

$$P = Sl \cdot 2r\pi = \varrho \frac{l}{A} (GA)^2 = RI^2.$$

Dies ist die JOULEsche Wärme in einem Leiter der Länge l. Auch in diesem Fall strömt die Energie nicht durch den Querschnitt der Leitung, sondern außerhalb im Dielektrikum, und sogar die zum Ausgleich des Wärmeverlustes der Leitung notwendige Energie strömt von außen, aus dem Dielektrikum, senkrecht zur Achse des Leiters in die Leitung. Gäbe es keine Strahlungserscheinungen, so könnte man über die Gültigkeit der beiden Vorstellungen streiten, da beide die Erscheinungen quantitativ richtig beschreiben. Dagegen kommen im Strahlungsfeld die Begriffe des im Leiter fließenden Stromes und des Potentialunterschiedes überhaupt nicht vor, obwohl in diesem eine nachweisbare Energieströmung besteht. Darum muß man die durch den POYNTINGschen Vektor beschriebene Vorstellung der Energieströmung als die richtige annehmen.

Es soll jetzt die Energieströmung in der Nähe eines Kondensators untersucht werden. An den Kondensator (Abb. 377a) soll eine Wechselspannung

$$U = U_0 \sin \omega t$$

gelegt werden; in diesem Fall entsteht – wie als bekannt vorausgesetzt werden soll – zwischen dem durch den Kondensator fließenden Strom und der Spannung eine Phasendifferenz von 90°. Der zeitliche Verlauf des Stromes und die Spannung sind in Abb. 377b gezeichnet. In einem anderen Maßstab ergibt diese Abbildung unmittelbar die Änderung der magnetischen und elektrischen Feldstärke in einem beliebigen Punkt in der Umgebung des Kondensators. Die elektrische Feldstärke ist nämlich immer dem momentanen Wert der Spannung, der Momentanwert des Stromes dagegen der magnetischen Feldstärke proportional. Abb. 377 zeigt die Richtung dieser Feldstärken und den zugehörigen POYNTINGschen Vektor. Nicht nur die Größe, sondern auch die Richtung des POYNTINGschen Vektors ändern sich zeitlich als Folge der zeitlichen Verschiebung von Strom und Spannung bzw. magnetischer und elektrischer Feldstärke um 90°. Wenn nämlich die Richtung des Stromes wechselt, verbleibt die Spannung noch eine Viertelperiode lang in der vorigen Richtung. Demnach werden die beiden zusammen einen entgegengesetzt gerichteten POYNTINGschen Vektor ergeben. Dies bedeutet, daß die Energie in der einen Halbperiode vom Kondensator, richtiger vom Generator, aus in das Feld fließt und in der zweiten Halbperiode in den Generator zurückfließt. Dieselbe Erscheinung kann auch bei Transformatoren oder im einfacheren Fall bei Selbstinduktions-

spulen beobachtet werden. Der POYNTINGsche Vektor zeigt den Aufbau und das Verschwinden des magnetischen Feldes genau an.

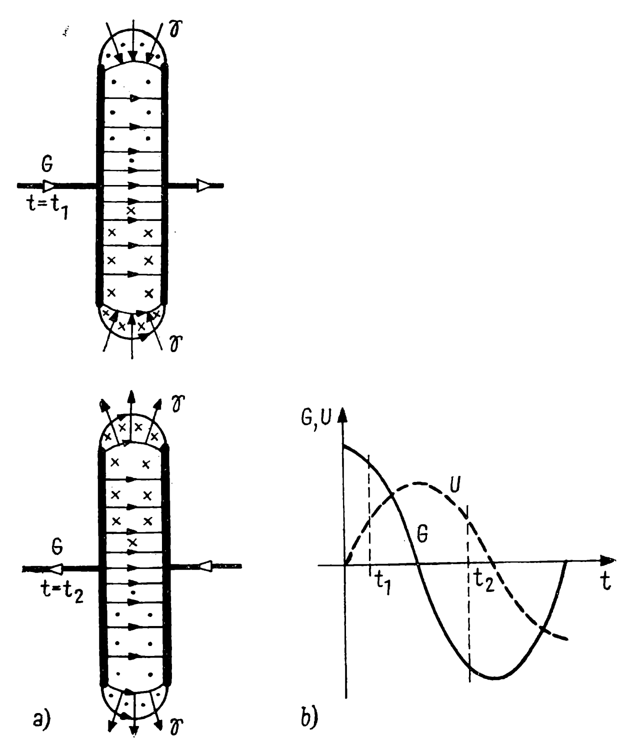


Abb. 377. Energieströmung in der Nähe eines Kondensators

Strahlungserscheinungen können eben dadurch entstehen, daß das elektromagnetische Feld, wenn man das magnetische Feld des Verschiebungsstromes und das aus der Änderung des magnetischen Feldes entstandene elektrische Feld berücksichtigt, neben den bereits behandelten Komponenten auch gleichphasige elektrische und magnetische Feldstärkekomponenten besitzt und demnach eine zeitlich konstant gerichtete Energieströmung erzeugt. In diesem Fall muß man die magnetische und elektrische Feldstärke als Funktion des Ortes und der Zeit bestimmen. Bei Kenntnis dieser Größen kann der POYNTINGsche Vektor in allen Punkten des Feldes berechnet und damit jede durch eine geschlossene Fläche gehende Strahlungsleistung bestimmt werden. In der Praxis wird die Quelle der Strahlungsenergie, z. B. eine Antenne, gemäß Abb. 378 von einer geschlossenen Fläche umgeben, auf der der POYNTINGsche Vektor bestimmt wird. Das Flächenintegral dieses Vektors liefert dann die von der

Antenne ausgestrahlte Leistung. Es ist demnach

$$P_s = \oint_A \mathfrak{S}\, d\mathfrak{A} = \oint_A (\mathfrak{E} \times \mathfrak{H})\, d\mathfrak{A}.$$

Zur Berechnung der Leistung ist daher die Kenntnis der Feldstärke notwendig. Unabhängig davon kann man die Abhängigkeit der Leistung von der Entfernung bestimmen. Die Amplituden der aus der Antenne austretenden

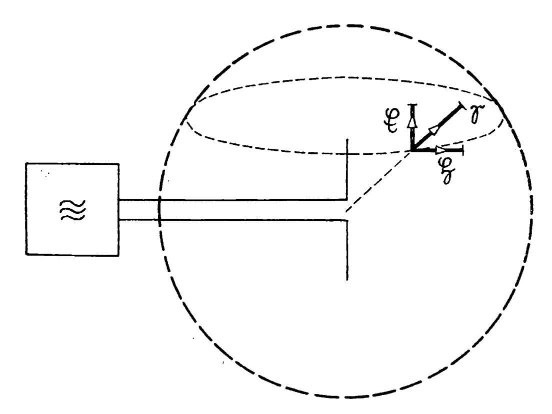


Abb. 378. Richtung der Feldstärken einer Antenne und der zugehörige POYNTINGsche Vektor

Wellen können nicht umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung abnehmen. Man kann das folgendermaßen einsehen. Bei der in Form von Kugelwellen ausgestrahlten Energie ergibt die Energie zwischen den Kugeln vom Halbmesser r bzw. $r + c$ die Strahlungsleistung (wobei c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist). Diese Energie wurde von der Antenne im Zeitabschnitt $t = r/c$ bis $t + 1$, d. h. binnen einer Sekunde abgegeben. Ist r sehr groß, so ist das Volumen $V = 4\pi\, r^2 c$ und damit die Energie

$$W = kEHV = k'EHr^2.$$

Diese Beziehung zeigt, daß bei sehr großen Entfernungen die Energie nur dann endlich bleibt, wenn sowohl E als auch H mit $1/r$ gegen Null gehen, d. h., bei einer Abhängigkeit des POYNTINGschen Vektors gemäß $1/r^2$ bleibt dieser endlich.

Es wurde das wichtige Ergebnis erhalten, daß im Strahlungsfeld E und H nicht den gewohnten Verlauf zeigen wie im statischen bzw. stationären Feld, sondern daß sie im Unendlichen nicht mit $1/r^2$, sondern mit $1/r$ verschwinden.

Zum POYNTINGschen Vektor gelangten wir durch die Umwandlung des Produktes UI. Wir sahen jedoch auch, daß die Leistung in viel allgemeineren Fällen mit Hilfe des POYNTINGschen Vektors bestimmt werden kann, und zwar auch dann, wenn die Leistung nicht mehr auf Strom und Spannung zurückgeführt werden kann.

6.15.6. *Zusammenfassung*

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß in einem endlichen Volumen verschiedene Energieumwandlungen vor sich gehen können, wobei die Summe der bei der Energieumwandlung beteiligten Energiemengen im Sinne des Gesetzes von der Erhaltung der Energie Null ergeben muß. Dies ist der Ausdruck dafür, daß Energie nicht entstehen, sondern nur von einer Form in die andere übergeführt werden kann.

Alle Änderungen werden auf die Zeiteinheit bezogen, wodurch die Erhaltung der Energie durch eine Leistungsbilanz ausgedrückt wird.

Die Leistung der Stromquelle erhöht die elektrische und magnetische Energie eines bestimmten Feldes während der Zeiteinheit um

$$\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m),$$

im nichtidealen Leiter erzeugt sie je Zeiteinheit die Wärmemenge

$$\int_V \gamma \mathfrak{E}^2 \, dV,$$

an sich bewegenden Körpern leistet sie je Zeiteinheit die mechanische Arbeit

$$\int_V \mathfrak{f}\,\mathfrak{v}\, dV \qquad \text{mit} \qquad \mathfrak{f} = \varrho\mathfrak{E} + \mathfrak{G} \times \mathfrak{B}$$

und strahlt je Zeiteinheit die Leistung

$$\oint_A (\mathfrak{E} \times \mathfrak{H})\, d\mathfrak{A}$$

aus. Somit ist

$$UI = \frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) + \int_V \gamma E^2\, dV + \int_V \mathfrak{f}\mathfrak{v}\, dV + \oint_A (\mathfrak{E} \times \mathfrak{H})\, d\mathfrak{A}.$$

Außerdem sind natürlich auch andere Energieumwandlungen möglich; so verwandelt sich z. B. bei der Aufladung eines Akkumulators die elektrische Energie in chemische Energie.

7. Das vollständige System der MAXWELLschen Gleichungen

Wir wollen abschließend die grundlegenden Beziehungen zusammenfassen, mit denen alle experimentellen Ergebnisse der Elektrodynamik quantitativ beschrieben werden und mit deren Hilfe alle praktischen Aufgaben prinzipiell gelöst werden können.

Diese Grundgleichungen, die als die MAXWELLschen Gleichungen bekannt sind, nehmen in der Elektrodynamik eine ähnliche Stellung ein wie die Axiome in der Geometrie. Die Axiome der Geometrie wurden aus der Erfahrung abstrahiert und sind aus keinem Grundgesetz herleitbar. Die aus diesen Axiomen gewonnenen Folgerungen entsprechen widerspruchslos den Erfahrungen. Dadurch können die Ergebnisse der Geometrie im alltäglichen Leben genutzt und angewendet werden.

Die MAXWELLschen Gleichungen sind die Grundaxiome des elektromagnetischen Feldes. Die aus ihnen abgeleiteten Folgerungen werden in der Praxis z. B. bei der Konstruktion elektrischer Maschinen angewendet. In einem Punkt unterscheiden sich jedoch die Grundaxiome des elektromagnetischen Feldes von denen der Geometrie grundlegend. Im Gegensatz zu den Axiomen der Geometrie stehen die MAXWELLschen Gleichungen nicht nur dann mit den Realitäten unserer Umwelt in Kontakt, wenn die aus ihnen gewonnenen Folgerungen in der Praxis genutzt werden, sondern beinhalten selbst Kenngrößen unserer stofflichen Umwelt, die über folgende die Materialkonstanten enthaltende Gleichungen Teile des Systems sind:

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}; \quad \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}; \quad \mathfrak{G} = \gamma\mathfrak{E}.$$

Die Grundgleichungen können leicht gefunden werden. Die einzelnen Teile dieses Buches wurden bewußt entsprechend den MAXWELLschen Gleichungen aufgebaut: Zuerst muß das Feld erzeugt werden, die Felder befinden sich in Wechselwirkung, die Eigenschaften des Stoffes beeinflussen das Feld, und das elektromagnetische Feld hat einen Energiegehalt, durch welchen sich verschiedene Kraftwirkungen ergeben.

Das magnetische Feld wird durch einen elektrischen Strom bzw. sich bewegende Ladungen erzeugt. Außerdem wird ein magnetisches Feld auch durch die Änderung des elektrischen Feldes erzeugt. Diese Gesetzmäßigkeiten drückt die erste MAXWELLsche Gleichung aus:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}. \qquad \text{(I)}$$

Im allgemeinen Fall setzt sich $\mathfrak{G}$ aus einem konduktiven Bestandteil $\gamma\mathfrak{E}$ und einem konvektiven Bestandteil $\varrho_+\mathfrak{v}_+ + \varrho_-\mathfrak{v}_-$ zusammen. In bewegten Systemen kommt noch das Glied $\mathfrak{H} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{D}$ dazu, und es wird

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \gamma\mathfrak{E} + \varrho_+\mathfrak{v}_+ + \varrho_-\mathfrak{v}_- + \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{D}.$$

Die Änderung des magnetischen Feldes erzeugt nach dem Induktionsgesetz oder der zweiten MAXWELLschen Gleichung ein elektrisches Feld:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}, \tag{II}$$

in bewegten Systemen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{B}.$$

Die Induktionslinien besitzen keine Quellen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0. \tag{III}$$

Dagegen beginnen bzw. enden die elektrischen Verschiebungslinien an den elektrischen Ladungen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho. \tag{IV}$$

Zwischen den einzelnen Feldgrößen bestehen von den Materialkonstanten abhängende Zusammenhänge, welche jedoch in jedem Fall experimentell bestimmt werden können, wie z. B. die folgenden:

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}; \quad \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}; \quad \mathfrak{G} = \gamma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_i) \tag{V}$$

oder allgemeiner formuliert

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0\mathfrak{E} + \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{B} = \mu_0\mathfrak{H} + \mathfrak{M}.$$

Das erzeugte elektromagnetische Feld besitzt eine Energie, die, falls die Dielektrizitätskonstante und die magnetische Permeabilität von der Feldstärke nicht abhängen, durch die Energiedichte

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 \tag{VI}$$

gekennzeichnet ist.

Bei ferromagnetischen und ferroelektrischen Stoffen erhalten wir dagegen

$$w = \int_0^{\mathfrak{B}} \mathfrak{H}\, d\mathfrak{B} + \int_0^{\mathfrak{D}} \mathfrak{E}\, d\mathfrak{D}.$$

Diese sechs Gleichungen bzw. Gleichungsgruppen bilden das vollständige System der MAXWELLschen Gleichungen. Es sind die grundsätzlichen Beziehungen, welche sämtliche experimentellen Tatsachen der Elektrodynamik beinhalten, wenn der Zusammenhang zwischen den Feldgrößen untereinander experimentell bekannt ist und auch der Ausdruck der Energie, der allgemein von den Stoffkonstanten abhängt, bestimmt ist. Wenn die Zahlenwerte von ε und μ für einen Stoff bekannt sind und man weiß, daß diese von E und H unabhängige Konstanten sind, kann jedes beliebige elektrische Problem prinzipiell gelöst werden. Das System der MAXWELLschen Gleichungen ist auch in dem Sinne vollständig, daß man aus der Kenntnis des elektrischen Zustandes des Feldes in einem gegebenen Zeitpunkt die Feldgrößen in einem beliebigen späteren Zeitpunkt mathematisch beweisbar mit Hilfe der MAXWELLschen Gleichungen eindeutig bestimmen kann.

8. Literaturverzeichnis

8.1. Allgemeine einführende Werke mit etwa der gleichen Zielsetzung wie das vorliegende Buch

[1] BECKER, R.: Theorie der Elektrizität. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, Bd. 1 1949, Bd. 2 1951.

[2] KÜPFMÜLLER, K.: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1962.

[3] POHL, R. W.: Einführung in die Elektrizitätslehre. Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1944.

[4] ROCARD, Y.: Elektrizität. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958.

[5] SCHÖNFELD, H.: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik. S. Hirzel Verlag, Leipzig 1952.

[6] Калантаров, П. Л., и Л. Р. Нейман: Теоретические основы электротехники (KALANTAROW, P. L., und L. R. NEIMAN: Theoretische Grundlagen der Elektrotechnik). Gosenergoisdat, Moskau–Leningrad 1951.

[7] Зеveке, Г. В., и Г. А. Ионкин: Теоретические основы электротехники, Часть 1 (SEWEKE, G. W., und G. A. IONKIN: Theoretische Grundlagen der Elektrotechnik, Teil 1). Gosenergoisdat, Moskau–Leningrad 1955.

[8] Нетушил, А. В., и С. В. Страхов: Теоретические основы электротехники, Часть 2 (NETUSCHIL, A. W., und S. W. STRACHOW: Theoretische Grundlagen der Elektrotechnik, Teil 2). Gosenergoisdat, Moskau–Leningrad 1955.

[9] Нетушил, А. В., и К. М. Поливанов: Теоретические основы электротехники, Часть 3 (NETUSCHIL, A. W., und K. M. POLIWANOW: Theoretische Grundlagen der Elektrotechnik, Teil 3). Gosenergoisdat, Moskau–Leningrad 1956.

[10] HARNWELL, G. P.: Principles of Electricity and Magnetism. McGraw-Hill Book Co., New York 1938.

[11] KRAUS, I. D.: Electromagnetics. McGraw-Hill Book Co., New York–Toronto–London 1953.

[12] SCOTT, W. T.: The Physics of Electricity and Magnetism. John Wiley & Sons, New York 1959.

[13] URBANEK, J.: Bevezetés a műszaki elméleti villamosságtanba (Einführung in die theoretische Elektrotechnik). Tankőnyvkiadó, Budapest 1956.

8.2. Ausführlichere Bücher für einzelne Gebiete

[14] DUSCHEK, A., und A. HOCHRAINER: Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung, Bd. I und II. Springer-Verlag, Wien 1950.

[15] OLLENDORF, F.: Die Welt der Vektoren. Springer-Verlag, Wien 1950.

[16] OLLENDORF, F.: Potentialfelder der Elektrotechnik. Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1932.

[17] SCHLEGELMILCH, W.: Die Differentialoperatoren der Vektoranalysis. VEB Verlag Technik, Berlin 1954.

[18] ATTWOOD, S. S.: Electric and Magnetic Fields. John Wiley & Sons, New York 1949.

[19] HIPPEL, A. R. VON: Dielectric Materials and Applications. John Wiley & Sons, New York 1954, und Chapman and Hall, London 1954.

[20] WEBER, E.: Electromagnetic Fields, Bd. I: Mapping of Fields. John Wiley & Sons, New York 1954, und Chapman and Hall, London 1954.

8.3. Bücher zur Ergänzung und Weiterbildung

[21] FLÜGGE, S., ed.: Handbuch der Physik, Bd. 16: Elektrische Wellen und Felder. Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1958.

[22] PHILIPPOW, E.: Grundlagen der Elektrotechnik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1959.

[23] JORDAN, E. C.: Electromagnetic Waves and Radiating Systems. Prentice-Hall, New York 1951.

[24] SIMONYI, K.: Foundations of Electrical Engineering, Fields–Networks–Waves. Pergamon Press, London 1963.

[25] STRATTON, J. A.: Electromagnetic Theory. McGraw-Hill Book Co., New York–Toronto–London 1941.

[26] PALM, A.: Elektrische Meßgeräte und Meßeinrichtungen. Springer-Verlag, Frankfurt (Main) 1942.

[27] GRIMSEHL, Lehrbuch der Physik, Bd. II, herausgegeben von W. SCHALLREUTER. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1961.

9. Sachverzeichnis

